

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Das Vektorfeld $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3).$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von \vec{g} .

Aufgabe 2

Wir führen auf \mathbb{R}^2 Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ein. Sei $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

- Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.
- Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi).$$

Aufgabe 3

- Die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} f ds \quad \text{für} \quad f(x, y, z) := 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

- $\vec{v}(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- $\vec{v}(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$, $0 \leq t \leq \ln 2$
- $\vec{v}(x, y) = (\sin x, x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1), & 1 < t \leq 2 \end{cases}$

Aufgabe 4

Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

- a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.
- b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (1 - t, t, 0)$ gegeben ist.