Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter Sommersemester 2015

Aufgabe 1

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im konvexen Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\Big)\,.$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\Big(\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2}\,dz\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

Aufgabe 2

Anhand einer komplexen Partialbruchzerlegung erkennen wir

$$F(z) = \frac{1+i}{z^2-z-iz+i} = \frac{i}{z-1} + \frac{-i}{z-i}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{1, i\}\,.$$

Nun erweitern wir den zweiten Summanden mit i und verwenden für $|z| < 1$ zweimal die Formel der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}F(z) \quad &= \quad \frac{i}{z-1} + \frac{1}{iz+1} = -i\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-(-iz)} \\ &\overset{|-iz|=|z|<1}{=} \quad -i\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-iz)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\big(-i + (-i)^k\big)z^k\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Die Funktion

$$F(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

hat in $z_0 = 1$ eine Polstelle zweiter Ordnung. Das Residuum von F in $z_0 = 1$ lässt sich bestimmen durch

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2F(z)\Big)\right)\Bigg|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big((z+1)^2\Big)\right)\Bigg|_{z=1} = \Big(2(z+1)\Big)\Bigg|_{z=1} = 4\,.$$

Alternativ können wir auch die Laurententwicklung von F um $z_0 = 1$ berechnen

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} = \frac{z^2-2z+1}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^2} \\ &= 1 + \frac{4(z-1+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

und hieran $\operatorname{res}(F;1) = 4$ ablesen.

b) Die Funktion

$$F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \qquad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

besitzt in $z_0 = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. Für das Residuum von F in 1 ergibt sich

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2F(z)\Big)\right)\Big|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big(ze^{az}\Big)\right)\Big|_{z=1} = \Big(e^{az} + zae^{az}\Big)\Big|_{z=1} = (1+a)e^a\,.$$

Aufgabe 4

a) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.

Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1) = \frac{\mathrm{e}\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von F in 1 gilt

$$\operatorname{res}(F;1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} F(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e-5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(F;-3) &= \left(\frac{d}{dz}\,(z+3)^2F(z)\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{z-1}\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2}\right)\Big|_{z=-3} \\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}\,. \end{aligned}$$

c) Schreibe $F(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $F(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$F(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\big(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \cdots\big) - 1} = \frac{z}{iz - \frac{1}{2}z^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}z + \cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{res}(F;0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.