Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg} h'(x,y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad \text{und} \quad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 2

a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\, dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\, dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\, dx$$

$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2) - y^2\big)\, dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$

Aufgabe 3

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 in 20.5 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\big]_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\big)\, dx = \big[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\big]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_0^2 \cosh(2x+y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{0} \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^{2} dx$$

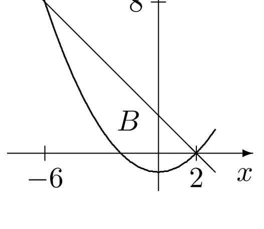
$$= \int_{-1}^{0} \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\, dx = \big[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\big]_{-1}^{0}$$

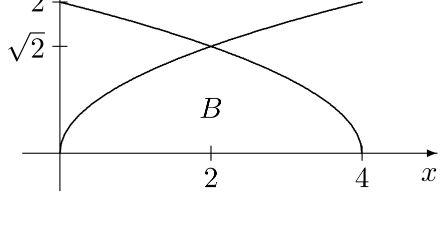
$$= \big(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\big) - \big(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\big) = \cosh 2 - 1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1$.

Aufgabe 4

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.





a) Es gilt

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\,dx\,dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y\,d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y\,d(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{x} dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^4\,dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2(x-1)\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.
\end{aligned}$$