Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

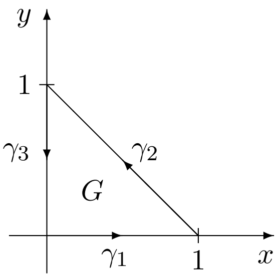
Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,,\\
&\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (2-t,t-1)\,,\\
&\gamma_3 \colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0,3-t)\,.
\end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt\\
&= \int_1^2 \big(t^3 - 6t^2 + 11t - 7\big)\,dt = \Big[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 7t\Big]_1^2 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}(3-t)^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \iint_G (2xy - x)\, d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\, dx \\ &= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\, dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y) = \iint_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\, \sin^2 t + \sin t \cos^2 t\big)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{4}\sin^2(2t) + \sin t \cos^2 t\big)\, dt \\ &= \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du\right) \\ &\overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \cos^2(u)\, du\right) \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} 1\, du\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{4\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t \cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{4\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{4\pi} \cos^2 t\, dt$.

Aufgabe 3

a) Für $(x,y,z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1,2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [1,2],\, -x \leqslant y \leqslant x\big\}$$

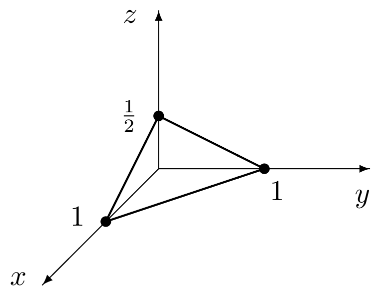
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in A_0,\, 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

[In der Notation von Abschnitt 21.2: $B_0 = A_0$, $a = 1$, $b = 2$, $u(x) = -x$, $v(x) = x$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.] Da der Integrand $f(x, y, z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(A) &= \iiint\limits_A d(x,y,z) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx = \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=-x}^{x} dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3} x^3\, dx = \left[\tfrac{1}{3} x^4\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16 - 1) = 5\,.
\end{aligned}$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, \frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x, y, z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$\begin{aligned}
&B = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x, y) \in B_0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y) \,\right\},\\
&\text{wobei} \quad B_0 := \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \,\right\}.
\end{aligned}$$

Da $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ auf B stetig ist, ergibt sich für das Integral nach 21.2

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[-\cos z\right]_{z=0}^{(1-x-y)/2} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[2 \sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\right]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\
&= \left[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\right]_{x=0}^{1} = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\operatorname{vol}(E) := \iiint\limits_E d(x,y,z)$$

für die Menge

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ durch. Die Substitutionsfunktion lautet also $\Phi(u, v, w) = (au, bv, cw)$ und hat die Ableitung

$$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $\det \Phi'(u,v,w) = abc > 0$. Ist $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$, denn

$$(u,v,w) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{au}{a}\right)^2 + \left(\frac{bv}{b}\right)^2 + \left(\frac{cw}{c}\right)^2 \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (au,bv,cw) = \Phi(u,v,w) \in E.$$

Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint_E d(x,y,z) = \iiint_K abc\, d(u,v,w) = abc \iiint_K d(u,v,w)\,.$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r=1$) beträgt das Volumen von K: $\frac{4}{3}\pi$, so dass

$$\iiint_E d(x,y,z) = abc\,\frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r\cos\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ für $\mathrm{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint_K d(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2\, d\varphi\, dr = \int_0^1 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\,.$$

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\, d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in A$ gilt $0 \leqslant z \leqslant 1$, und die zweite A definierende Ungleichung liefert die Bedingung $r^2 \leqslant (1-z)^2$. Die Menge A ist also charakterisiert durch

$$0 \leqslant z \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1-z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}
\iiint_A (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6} r^6\right]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\, dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.
\end{aligned}$$

c) Sei $0 < r < R$. Zur Berechnung von

$$\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \in [r,R],\ |y| \leqslant x\big\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \quad \text{mit } \varrho \in [r,R],\ \varphi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \leqslant x$. Würde man $\varphi \in [0,2\pi]$ fordern, so müsste man $\varphi \in [0,\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \in [r,R], 0 \leqslant y \leqslant x\}$ und $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \in [r,R], -x \leqslant y \leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x,y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_r^R \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac{1}{2}(R^2-r^2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\varphi\, d\varphi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.