Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) • Mit $\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ ergibt sich

$$(1+i)^i = e^{i\operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\pi/4} = e^{-\pi/4}\big(\cos(\ln\sqrt{2}\,) + i\sin(\ln\sqrt{2}\,)\big)\,.$$

Man liest ab: $\operatorname{Re}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\cos(\frac{1}{2}\ln 2)$ und $\operatorname{Im}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\sin(\frac{1}{2}\ln 2)$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i\operatorname{Arg} i = i\pi/2$ gilt $i^i = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$, also

$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2}\operatorname{Log} i) = \exp(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2} i) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2}) + i\sin(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})\,.$$

Man sieht: $\operatorname{Re}(i^{(i^i)}) = \cos(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$ und $\operatorname{Im}(i^{(i^i)}) = \sin(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ ergibt sich

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \ln|i\pi/2| + i\operatorname{Arg}(i\pi/2) = \ln(\pi/2) + i\pi/2\,.$$

Damit erhalten wir

$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i\ln(\pi/2)-\pi/2} = e^{-\pi/2}\cos\big(\ln(\pi/2)\big) + ie^{-\pi/2}\sin\big(\ln(\pi/2)\big)\,,$$

und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

b) Die Gleichung $e^{1/z} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z} = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\,\frac{(1+4k)\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = -i\,\frac{2}{(1+4k)\pi}$$

mit einem gewissen $k \in \mathbb{Z}$ gilt, d.h. $\{z \in \mathbb{C} :\ e^{1/z} = i\} = \{\frac{-2i}{(1+4k)\pi} :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 2

a) Für $\omega \neq 0$ gilt

$$\mathscr{F}f(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = \Big[\frac{1}{-i\omega}\,e^{-i\omega t}\Big]_{t=-1}^{1} = \frac{1}{i\omega}\big(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\big) = 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,.$$

Für $\omega = 0$ ist

$$\mathscr{F}f(0) = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2\,.$$

b) Definitionsgemäß gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} te^{-t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} te^{t}e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Wegen $\int te^{\alpha t}\,dt = te^{\alpha t}/\alpha - \int e^{\alpha t}/\alpha\,dt = te^{\alpha t}/\alpha - e^{\alpha t}/\alpha^2$ erhält man für $c > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^c te^{-t}e^{-i\omega t}\,dt &= \int_0^c te^{-t(1+i\omega)}\,dt = \left[\frac{te^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} - \frac{e^{-t(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2}\right]_{t=0}^c \\ &= \left(\frac{ce^{-c(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} - \frac{e^{-c(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right) \xrightarrow{c\to\infty} \frac{1}{(1+i\omega)^2}\,,\end{aligned}$$

wobei man $|e^{-c(1+i\omega)}| = e^{-c}$ beachten muss. Für das zweite Integral ergibt sich analog $\int_{-\infty}^0 te^{t(1-i\omega)}\,dt = \int_0^\infty(-\tau)e^{-\tau(1-i\omega)}\,d\tau = -(1-i\omega)^{-2}$, d.h. wir haben

$$\mathscr{F}f(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} = \frac{(1-i\omega)^2-(1+i\omega)^2}{(1+\omega^2)^2} = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Alternativ: Da $t \mapsto te^{-|t|}$ absolut integrierbar ist, ist $\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}$ nach 26.3 (e) differenzierbar und für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}(\omega) = \mathscr{F}\{(-it)e^{-|t|}\}(\omega) = -i\mathscr{F}\{te^{-|t|}\}(\omega)$$

bzw.

$$\mathscr{F}\{te^{-|t|}\}(\omega) = i\,\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}(\omega) \overset{\text{Bsp. in 26.2}}{=} i\,\frac{d}{d\omega}\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

c) Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ (vgl. Additionstheorem des cos)

$$\begin{aligned}g(t-\pi/2) &= \begin{cases}\cos(t-\pi/2) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqslant t-\pi/2 \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} = \begin{cases}\sin(t) & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \\ &= f(t)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f(\omega) = \mathscr{F}\{g(t-\pi/2)\}(\omega) = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\mathscr{F}g(\omega)\,.$$

Im Tutorium wurde es bewiesen,dass für $\omega \neq \pm 1$ gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{F}f(\omega) &= e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\mathscr{F}g(\omega) = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2} = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\omega} + e^{-i\frac{\pi}{2}\omega}\right)\frac{1}{1-\omega^2} \\ &= \left(1+e^{-i\pi\omega}\right)\frac{1}{1-\omega^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathscr{F}f(1) &= e^{-i\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}}\mathscr{F}g(1) = -i\,\frac{\pi}{2}\,, \\ \mathscr{F}f(-1) &= e^{-i\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2}}\mathscr{F}g(-1) = i\,\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

d) Es sei

$$g(t) := \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = \frac{t}{t^4+2t^2+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{-2t}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,g'(t)\,.$$

Wir berechnen zunächst $\mathscr{F}g$ und argumentieren zur Bestimmung von $\mathscr{F}f$ mit der Ableitungsregel der Fouriertransformation.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) := e^{-|t|}$, gilt

$$\mathscr{F}h(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist also $\mathscr{F}g = \frac{1}{2}\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}$. h ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Ferner ist $\mathscr{F}h$ absolut integrierbar, denn $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}h(\omega)|\,d\omega = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega = 2\lim_{b\to\infty}[\arctan\omega]_0^b = \pi$. Damit sind die Voraussetzungen der Fourierinversionsformel für h erfüllt. Diese besagt

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\mathscr{F}h(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}(-t) \qquad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$\mathscr{F}g(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}(\omega) = \frac{1}{2}\,2\pi\,h(-\omega) = \pi\,e^{-|-\omega|} = \pi\,e^{-|\omega|}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Da g stetig, differenzierbar und absolut integrierbar sowie g' stetig und absolut integrierbar ist, gilt

$$\mathscr{F}f(\omega) = -\frac{1}{2}\,\mathscr{F}g'(\omega) = -\frac{1}{2}\,i\omega\,\mathscr{F}g(\omega) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\,i\omega\pi\,e^{-|\omega|}\,.$$

Aufgabe 3

Sei $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$. Wie in Aufgabe **4 a)** gesehen, gilt für die Fouriertransformierte von f

$$\mathscr{F}f(\omega) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0\,, \\ 2 & \text{für } \omega = 0\,. \end{cases}$$

Wir verwenden den Satz von Plancherel: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\omega)|^2\,d\omega\,.$$

Für die oben definierte Funktion f sind die Voraussetzungen erfüllt; also gilt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\omega)|^2\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = \pi\,.$$

Da $\omega \mapsto \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$ eine gerade Funktion ist (denn $\frac{\sin^2(-\omega)}{(-\omega)^2} = \frac{(-\sin(\omega))^2}{\omega^2} = \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$), ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega$$

und damit

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\,.$$