Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, z \geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r \\ &= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2).\end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}\iint_M \vec{f}\cdot\vec{N}\,do &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)}{\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|}\, \|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\ &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \left[\pi\,\frac{r^3}{3} + \left(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\right) 2\pi\right]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 4,\, z = 0\right\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned} \iint\limits_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi. \end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{f}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint\limits_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\pi.$$

Bemerkung: Alternativ kann man $\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$ (Diesen nennt man auch den *Gaußschen Integralsatz.*) berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_K \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint\limits_K 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_K d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_{B} \|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\| \, d(x,y) = \iint\limits_{B} \| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \| \, d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \| \, d(x,y) = \iint\limits_{B} \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1} \, d(x,y) \\
&= \iint\limits_{B} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, d(x,y).
\end{aligned}
$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$
A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\, r \, d(r,\varphi) = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r \, dr = 2\pi \big[\tfrac{1}{12}\,(4r^2+1)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2}-1).
$$

Aufgabe 3

Seien $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leqslant 3, \; z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2, \; x \geqslant 0\big\}$ und

$$
\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + z^2 \\ x - 2z \\ -2xz + 2y + 2z \end{pmatrix}.
$$

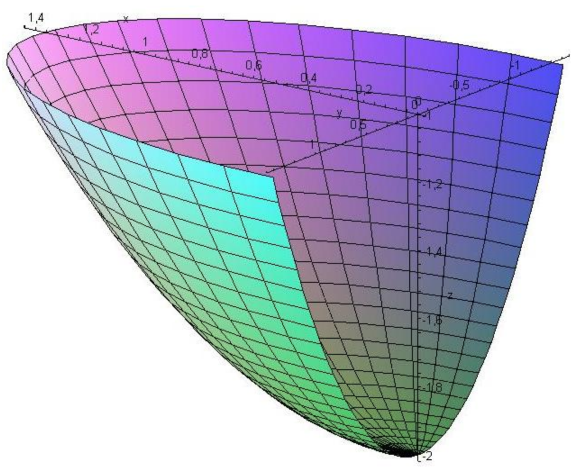
$\mathcal{F}$ bezeichne die Oberfläche von B und $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$.
Ist die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ an den Normaleneinheitsvektor $\vec{N}$ angepasst, so gilt nach dem Integralsatz von Stokes

$$
\iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} \, do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}.
$$

Eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$
\vec{g}\colon V \to \mathbb{R}^3, \;\; \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}r^2 - 2 \end{pmatrix}
$$

mit $V := [0,\sqrt{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Hierbei erhält man die Bedingung $r \in [0,\sqrt{2}]$ aus der Ungleichung $x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leqslant 3$ und die Forderung $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aus $x \geqslant 0$.)



Der Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ besteht aus zwei Kurvenstücken: einem Halbkreis in der Ebene $z = -1$ mit Radius $\sqrt{2}$ und einem Parabelstück der Parabel $z = \frac{1}{2}y^2 - 2$ in der Ebene $x = 0$. Eine Parametrisierung des Halbkreises ist

$$\gamma_1 \colon [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

(nehme $r = \sqrt{2}$) und eine Parametrisierung des Parabelstücks lautet

$$\gamma_2 \colon [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_2(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ \frac{1}{2}r^2 - 2 \end{pmatrix}$$

(nehme $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Die Orientierung von γ_1 entspricht allerdings noch nicht der Rechtsschraubenregel. $\partial\mathcal{F}$ wird durch $-\gamma_1$ und γ_2 korrekt parametrisiert (vgl. Skizze). Daher ist

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{-\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\gamma_1(\varphi))\cdot\dot{\gamma}_1(\varphi)\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi + 1 \\ \sqrt{2}\cos\varphi + 2 \\ 2\sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi - 2\sin^2\varphi - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi \big)\,d\varphi \\
&\overset{(*)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi + 2\cos(2\varphi) - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi \big)\,d\varphi \\
&= \Big[\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\varphi + \sin(2\varphi) + \sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(in $(*)$ verwendeten wir das Additionstheorem des Cosinus: $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$) sowie

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{v}(\gamma_2(r))\cdot\dot{\gamma}_2(r)\,dr = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r + (\frac{1}{2}r^2 - 2)^2 \\ -r^2 + 4 \\ 2r + r^2 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} dr \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(-r^2 + 4 + 2r^2 + r^3 - 4r \big)\,dr \\
&= \Big[\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{1}{3}r^3 - 2r^2 + 4r \Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{N}\,do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -4\sqrt{2} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = \tfrac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 4

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big)\,(-1) = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u\, \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\, \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{U} \cos^2 u\, \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1}\, d(u,v) = \int_0^{2\pi}\!\! \int_0^1 \cos^2 u\, dv\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big) = u^2 \cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v\, \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u,\ \text{da } u \geqslant 0}\, d(u,v) = \int_0^1\!\! \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v\, dv\, du \\
&= \left(\int_0^1 u^3\, du\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iiint\limits_{Z} 5x^2\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z) \\
&= \int_0^1\!\! \int_0^{2\pi}\!\! \int_0^1 5r^3 \cos^2\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1\!\! \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2\varphi\, d\varphi\, dr \\
&= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$