Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2016
19.09.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (2 + 3 + 5 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösungsvorschlag: Es gilt für das charakteristische Polynom von A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5),$$

die Eigenwerte sind also 0 und 5. Für die Eigenräume gilt

$$E_A(0) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(0) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_A(5) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_A(5) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y^2 + e^{y^2} \\ ay(e^x + xe^{y^2}) \end{pmatrix}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a so, dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie für dieses a ein zugehöriges Potential.

Lösungsvorschlag: Damit $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist, müssen die Integratilitätsbedingungen erfüllt sein. Es muss also

$$\partial_y w_1(x,y) = 2ye^x + 2ye^{y^2} \stackrel{!}{=} aye^x + aye^{y^2} = \partial_x w_2(x,y)$$

gelten, woraus $a = 2$ folgt. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist die Bedingung $a = 2$ hinreichend. Eine Stammfunktion finden wir nun über

$$W(x,y) = \int e^x y^2 + e^{y^2} dx = e^x y^2 + xe^{y^2} + C(y)$$

$$\partial_y W(x,y) = 2ye^x + 2xye^{y^2} \stackrel{!}{=} w_2(x,y) = 2ye^x + 2xye^{y^2}$$

Also wählen wir z.B. $C(y) = 0$

$$\Rightarrow W(x,y) = e^x y^2 + xe^{y^2}$$

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:
Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 3Z_1]{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_2 - Z_3]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (5 + 2 + 3 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$, und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{2} \leqslant 1\}$. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f auf B.

Lösungsvorschlag: Wir untersuchen zunächst das Innere von B. Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Da jedoch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in B liegen und $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, ist $(0, 0)$ wegen $f(0, 0) = 0$ weder das Maximum noch das Minimum von f auf B. Somit wird es auf dem Rand angenommen.

Wir benutzen Lagrange mit der Menge

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \right\}$$

Mit $h(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - 1$ ist $C = h^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen (da h stetig und $\{0\}$ abgeschlossen) und beschränkt für $(x, y) \in C$

$$x^2 + y^2 \leqslant 2 \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) = 2$$

Zudem ist f stetig differenzierbar und $h'(x, y) = (2x \quad y)$ hat nur in $(0, 0) \notin C$ nicht den vollen Rang 1.

Lagrange liefert für ein Extremum nun die Gleichungen

$$y + \lambda \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow y = -2x\lambda$$

$$x + \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow 0 = x - 2\lambda^2 x = x(1 - 2\lambda^2)$$

wobei $x \neq 0$ gilt. (sonst $(x, y) = (0, 0)$), also folgt $2\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \mp\sqrt{2}x$

Da weiterhin $(x, y) \in C$ folgt

$$x^2 + \frac{2x^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit

$$y = \pm 1$$

Es gilt

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und somit ist

$$\max_{(x,y)\in B} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\min_{(x,y)\in B} f(x, y)$$

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}, t \in [0, \sqrt{3}].$$

Lösungsvorschlag: Wir berechnen $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$ und es folgt

$$l(\gamma) = \int_0^{\sqrt{3}} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + t^4}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

Substituiere: $s = \sqrt{1 + t^2}$

$$l(\gamma) = 2\int_1^2 s^2\,\mathrm{d}s = \left[\frac{2}{3}s^3\right]_{s=1}^2 = \frac{14}{3}$$

c) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeit in $(0, 0)$. Untersuchen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ auf Existenz und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

Lösungsvorschlag: g ist in $(0, 0)$ unstetig, da $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0)$ und

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Für die partielle Ableitung gilt

$$\frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

und somit

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = 0.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(4 + 6 Punkte)**

a) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{\arccos(y)} \sin(\sin(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

Lösungsvorschlag: Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt folgende Integrationsbereiche

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ [0, \cos(x)]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(x)} \sin(\sin(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(\sin(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= [-\cos(\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \cos(\sin(\frac{\pi}{2})) = 1 - \cos(1)$$

b) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ -\frac{y^2}{2} \\ 2z^2 + \sin x \end{pmatrix}$. Die Oberfläche von $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ wird mit ∂D bezeichnet. Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Ausfluss von $\vec{v}$ durch ∂D, das heißt das Integral $\iint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}o$, wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Bereichs zeigt.

Lösungsvorschlag:

Nach dem Divergenzsatz gilt

$$\iiint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}o = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{v})\,\mathrm{d}(x,y,z)$$
$$= \iiint_D y - y + 4z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_D 4z\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

Mittels Transformation in Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r} 4z\,r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 \left[2z^2\right]_0^{1-r} r\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^1 2(1-r)^2\,r\,\mathrm{d}r = 2\pi \left[r^2 - \frac{4}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$