Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2016
08.03.2016

## Modulprüfung / Bachelor

## Komplexe Analysis und Integraltransformationen für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

### Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

**a)** Bestimmen Sie mittels Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 8e^{-t},\ y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$$

Lösungsvorschlag: Mit Laplacetransformation bekommen wir

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + y\} = \frac{8}{(s+1)},$$

oder

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 4s + 2 + 2s\mathcal{L}\{y\} - 8 + \mathcal{L}\{y\} = \frac{8}{(s+1)}.$$

Wenn wir das vereinfachen erhalten wir

$$(s^2 + 2s + 1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{8}{(s+1)} + 4s + 6.$$

Das gibt dann

$$\mathcal{L}\{y\} = 4\frac{2!}{(s+1)^3} + \frac{4}{(s+1)} + 2\frac{1!}{(s+1)^2}.$$

Deshalb lautet die Lösung des Angangswertproblems

$$y(t) = 4t^2e^{-t} + 4e^{-t} + 2te^{-t}.$$

**b)** Berechnen Sie die folgenden Integrale. Die Integrationswege sollen jeweils positiv orientierte einfach geschlossene Kurven sein.

$$(i) \oint_{|z|=1} \frac{\tan z}{z(z-2)}dz, \quad (ii) \int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}dz, \quad (iii) \oint_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}dz.$$

Lösungsvorschlag:

$$(i) \oint_{|z|=1} \frac{\tan z}{z(z-2)}dz = 2\pi i Res(\frac{\tan z}{z(z-2)}),$$

weil der Kreis $|z| = 1$ nur die Singularität Null enthält. Aber $\lim_{z\to 0} \frac{\tan z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}$ deshalb ist die Singularität hebbar und deshalb ist das Residuum und das Integral Null.

Alternativ: $Res(\frac{\tan z}{z(z-2)}) = \lim_{z\to 0} z\frac{\tan z}{z(z-2)} = 0$.

(ii) Der Kreis $|z-1| = \frac{3}{2}$ enthält nur die Singularität 2 und diese ist ein Pol Ordnung höchstens 2. Also $Res(\frac{1}{(z+1)(z-2)^2}, 2) = \frac{d}{dz}((z-2)^2\frac{1}{(z+1)(z-2)^2})|_{z=2} = \frac{d}{dz}(\frac{1}{(z+1)})|_{z=2} = -\frac{1}{(z+1)^2}|_{z=2} = -\frac{1}{9}$. Also $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}dz = -\frac{2\pi i}{9}$.

(iii) Der Kreis $|z| = 1$ enthält nur die Singularität $z = 0$, weil $e^{2iz} = 1$, genau dann wenn $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und wenn zusätzlich $|z| < 1$ bekommen wir $z = 0$. Da aber $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^{2iz}-1} = \frac{1}{\frac{d}{dz}e^{2iz}|_{z=0}} = -2i$, existiert der Limes und ist die Singularität hebbar. Deshalb ist das Residuum in $z = 0$ Null und verschwindet das Integral.

**Aufgabe 2 ( 2 + 3 + 5 Punkte)**

**a)** Wir betrachten die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n!}}$. Bestimmen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$.

Hinweis: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lösuingsvorschlag: Die Parsevalsche Gleichung gibt, dass $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n!}})^2 = 2\pi(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1) = 2\pi(e-1)$.

**b)** Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = i$ und

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xy, \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\operatorname{Im} f(x+iy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag: Sei $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen lauten $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Deshalb $v_y = u_x = 2x + 2y$ und das gibt $v = 2xy + y^2 + c(x)$. Das gibt $v_x = 2y + c'(x)$ und da $v_x = -u_y = 2y - 2x$ bekommen wir $c'(x) = -2x \implies c(x) = c - x^2$. Also $\operatorname{Im} f(x+iy) = 2xy + y^2 - x^2 + c$. Da aber $\operatorname{Im} f(0) = 1$ bekommen wir $c = 1$ und deshalb $\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + 1$.

**c)** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = e^{ix} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$. Bestimmen Sie $\mathcal{F}\{f'\}$, d.h. die Fouriertransformation der ersten Ableitung von $f$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{F}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ gilt.

Lösungsvorschlag: Mit Hilfe der Rechenregeln der Fouriertransformation bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'\}(\omega) &= i\omega\mathcal{F}\{f\}(\omega) = i\omega\mathcal{F}\{e^{ix}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\}(\omega) = i\omega\mathcal{F}\{e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\}(\omega-1) \\ &= i\omega e^{-2i(\omega-1)}\mathcal{F}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\}(\omega-1) = i\omega e^{-2i(\omega-1)}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}}.\end{aligned}$$