Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2016
20.09.2016

Modulprüfung / Bachelor

Komplexe Analysis und Integraltransformationen für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie mittels Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = -y(0) + s\mathcal{L}\{y\}(s) = s\mathcal{L}\{y\}(s)$$

und

$$\mathcal{L}\{y''\} = -sy(0) - y'(0) + s^2\mathcal{L}\{y\}(s) = -1 + s^2\mathcal{L}\{y\}(s).$$

Also

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + y\}(s) := -1 + s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - 2s\mathcal{L}\{y\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s)$$

und da

$$\mathcal{L}\{te^t\}(s) = \frac{1}{(1-s)^2}$$

bekommen wir $-1 + s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - 2s\mathcal{L}\{y\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(1-s)^2}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{(1-z)^2(z^2-2z+1)} + \frac{1}{(z^2-2z+1)} = \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^2}\\ &= \frac{1}{6}\mathcal{L}\{t^3e^t\} + \mathcal{L}\{te^t\}.\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit gegeben durch:

$$y(t) = \left(\frac{t^3}{6} + 6\right)e^t.$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Die Integrationswege sollen jeweils positiv orientierte einfach geschlossene Kurven sein.

$$(i) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}dz, \quad (ii) \int_{|z|=3} \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}dz, \quad (iii) \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z-1}}dz.$$

Lösungsvorschlag: (i) Innerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{2}$ hat die Funktion keine Singularitäten, deshalb gilt wegen des Cauchyschen Integralsatzes

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}dz = 0.$$

(ii) Wegen des Residuensatzes gilt:

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{(z+1)(z-1)^2} dz = 2\pi i Res_{-1} f + 2\pi i Res_1 f,$$

wobei

$$Res_{-1} f = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \frac{1}{4}$$

und

$$Res_1 f = \frac{d}{dz} \left((z-1)^2 f(z) \right) |_{z=1} = \frac{d}{dz} \frac{1}{z+1} |_{z=1} = -\frac{1}{(z+1)^2} |_{z=1} = -\frac{1}{4}.$$

Es folgt somit

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 0.$$

(iii) Die Funktion

$$g(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$$

hat eine wesentliche Singularität bei z=1 für $|z| < 2$. Es gilt

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1} \right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=-\infty}^{0} (z-1)^k \frac{1}{-k!} = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k (z-1)^k.$$

Mit

$$Res_1 g(z) = c_{-1} = 1$$

ergibt sich als Lösung des Integrals

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi i.$$

Aufgabe 2 (2 + 3 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie den real und Imaginärteil von $(1+\sqrt{3}i)^{1+i}$
Lösuingsvorschlag: Es gilt:

$$(1+\sqrt{3}i)^{1+i} = exp\left((1+i) \log(1+\sqrt{3}i) \right).$$

Mit

$$\log(1+\sqrt{3}i) = log(2) + iarg(1+\sqrt{3}i) = log(2) + i\frac{\pi}{3}$$

ergibt sich

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{1+i} = exp\left((1+i)(i\frac{\pi}{3} + \log(2)) \right) = exp\left(\log(2) - \frac{\pi}{3} + i(\frac{\pi}{3} + log(2)) \right)$$
$$= 2e^{-\frac{\pi}{3}} \left(\cos(\frac{\pi}{3} + ln(2)) + i \sin(\frac{\pi}{3} + ln(2)) \right).$$

Real- und Imaginärteil sind also gegeben durch:

$$Re\left(1+\sqrt{3}i\right)^{1+i} = 2e^{-\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + ln(2)\right)$$

und

$$Im\left(1+\sqrt{3}i\right)^{1+i} = 2e^{-\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + ln(2)\right).$$

b) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} x & , 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & , \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$

Lösungsvorschlag:
Es gilt:

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-ikx}dx \overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{xe^{-ikx}}{-ik}|_0^{\pi} - \frac{1}{-ik}\int_0^{\pi} e^{-ikx}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-ik\pi}}{-ik} - \frac{1}{-ik}^{2} e^{-ikx}|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi(-1)^k}{-ik} + \frac{1}{k^2}(e^{-ik\pi} - 1)\right] = \frac{i}{2k}(-1)^k + \frac{1}{2\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

$$= \begin{cases} k\,gerade : \frac{i}{2k} \\ k\,ungerade : \frac{-i}{2k} - \frac{1}{\pi k^2} \end{cases}.$$

Für k=0 erhält man:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{4}.$$

c) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = e^{-2ix}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$. Bestimmen Sie die Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f\}$ von f.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{F}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ gilt.
Lösungsvorschlag:
Mit dem Hinweis

$$\mathcal{F}\{\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{h(x)}\}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

lässt sich die Funktion f(x) wie folgt darstellen

$$f(x) = e^{-2ix}h\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right).$$

Für die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2ix}h\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\omega x}dx$$

ergibt sich mit der Substitution

$$y := \frac{x+3}{\sqrt{2}}; \quad x = \sqrt{2}y - 3$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)e^{-ix(\omega+2)}dx = \int_{\mathbb{R}} h(y)e^{-i(\sqrt{2}y-3)(\omega+2)}dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(y)e^{-iy(\sqrt{2}\omega+2\sqrt{2})}dye^{i\cdot 3(\omega+2)} = \mathcal{F}(h)[\sqrt{2}(\omega+2)]e^{i\cdot 3(\omega+2)} = 2\sqrt{\pi}e^{-(\omega+2)^2}.$$