Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Sommersemester 2015

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Das Skript wird vor dem Dozenten
der Vorlesung geändert

Dozent: Ioannis Anapolitanos
email:ioannis.anapolitanos@kit.edu

Contents

Innerhalb der Veranstaltung *Höhere Mathematik II für die Fachrichtung elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen* wird der Teil zu *Komplexe Analysis und Integraltransformationen* jeweils in der Vorlesung am Montag behandelt. Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Fourierreihen

Ziel dieses Abschnitts ist es, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, der Periodenlänge $T > 0$ (man denke etwa an ein periodisches Audiosignal) als Überlagerung von T-periodischen "reinen" Schwingungen $t \mapsto e^{i\omega t}$ darzustellen. Die "Frequenzen" ω sind dann von der Form $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ hat man einen konstanten Anteil, die anderen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\frac{2\pi}{T}$ (Tonhöhe). Die Anteile der Oberschwingungen bestimmen die Klangfarbe.

Die Idee geht zurück auf Fourier (1822): "Jede 2π-periodische Funktion f lässt sich darstellen als Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$."

Es hat einige Zeit gedauert, diese Idee zu präzisieren (Funktionsbegriff, geeigneter Integralbegriff, verschiedene Konvergenzbegriffe etc). Wir kümmern uns hier um die Fragen, wie man die c_k aus f erhält und für welche f man eine punktweise Konvergenz der Fourierreihe hat.

1.1. Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Für jedes $t \in [a, b]$ ist $f(t)$ eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch $u(t) := \mathrm{Re}\,(f(t))$ und $v(t) := \mathrm{Im}\,(f(t))$ werden Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert mit $f(t) = u(t) + iv(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (Bezeichnungen $u =: \mathrm{Re}\, f$, $v =: \mathrm{Im}\, f$).

Die Funktion f heißt (Riemann-)integrierbar, falls u **und** v integrierbar sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Das Integral ist $\mathbb{C}$-linear, dh: Ist $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine weitere integrierbare Funktion und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dt = \alpha\int_a^b f\,dt + \beta\int_a^b g\,dt.$$

Uneigentliche Integrale erklärt man entsprechend.

Analog heißt f differenzierbar in $t_0 \in [a, b]$, falls u **und** v differenzierbar in t_0 sind, und in diesem Falle ist $f'(t_0) := u'(t_0) + iv'(t_0)$ die Ableitung von f in t_0.

Auch die Ableitung ist $\mathbb{C}$-linear. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel, wobei in der Kettenregel für $f \circ g$ die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ komplexwertig ist, aber $g : [c, d] \to [a, b]$ reellwertig.

Folgerung: Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen, also können Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

Erinnerung: Für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ ist

$$e^w = e^{u+iv} = e^u\, e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v),\ \ |e^w| = |e^u|\,|e^{iv}| = e^u = e^{Re\, w}.$$

Beispiele: (1) Für $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{wt}\,dt = \frac{e^{wb} - e^{wa}}{w}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{wt} &= \frac{d}{dt}(e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt))) = ue^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt)) + e^{ut}(-v\sin(vt) + iv\cos(vt)) \\ &= (u + iv)e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt)) = we^{wt}\end{aligned}$$

folgt das aus dem Hauptsatz.

(2) Für $l, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases}.$$

1.2. T-periodische Funktionen: Sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt T-periodisch, falls $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Es gilt dann auch $f(t + kT) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: (a) Eine T-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte auf einem Intervall $[a, a + T)$ kennt (hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig). Jede Funktion $\tilde{f} : [a, a+T) \to \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig zu einer T-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}$ auf $[a, a + T)$ fortsetzen.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Funktion, so ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(t) := f(\frac{T}{2\pi}t)$, eine 2π-periodische Funktion. Es ist dann nämlich für $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t + 2\pi) = f\Big(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\Big) = f\Big(\frac{T}{2\pi}t + T\Big) = f\Big(\frac{T}{2\pi}t\Big) = g(t).$$

Wir werden uns deshalb i.w. auf 2π-periodische Funktionen beschränken.

Beispiele: sin, cos und $t \mapsto e^{it}$ sind 2π-periodische Funktionen. Die Funktion $t \mapsto \cos(2t)$ ist 2π-periodisch, aber auch π-periodisch.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über beschränkten Intervallen integrierbar ist, so gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Wir werden 2π-periodische Funktionen meist auf $[-\pi, \pi)$ betrachten und über dieses Intervall integrieren.

1.3. Trigonometrische Polynome: Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$, falls es Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$, gibt mit

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für ein solches f und $l \in \mathbb{Z}$ gilt dann nach Beispiel 1.1 (2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt}\, dt = \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt}\, dt = \begin{cases} 2\pi c_l & , |l| \leq n \\ 0 & , |l| > n \end{cases} .$$

Daraus folgt, dass für alle $l \in \mathbb{Z}$ mit $|l| \leq n$ gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{1}$$

Bemerkung: Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aus der Definition von f zusammen mit (1), (2) folgt, dass

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt),$$

wobei

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \tag{3}$$

und

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt. \tag{4}$$

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, mit $f|_{[-\pi,\pi)}$ integrierbar. Dann die Zahlen c_k mit $k \in \mathbb{Z}$, a_k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, b_k mit $k \in \mathbb{N}$ heißen Fourierkoeffizienten von f. c_k wird oftmals durch $\hat{f}(k)$ bezeichnet. Es gilt

$$a_0 = 2c_0$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}),$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

1.4. Fourierreihen einer Funktion: Sei f eine 2π-periodische function, mit $f|_{[-\pi,\pi)}$ integrierbar. Die Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt),$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} := \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt},$$

wobei a_k, b_k, c_k durch (1), (3) und (4) gegeben sind, heißen Fourierreihen von f. Zu unterscheiden ninnt man oft die zweite Reihe komplexe Fourierreihe, wegen der komplexwertigen Funktionen e^{ikt}. Im Absatz 1.5 werden wir beantworten in welchen Fällen gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt),$$

oder

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Beispiel:

(1) Sei die 2π-periodische Funktion f auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch $f(t) = t^2$. Für $k = 0$ ist

$$c_0 = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für $k \neq 0$ ist

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} \, dt = \underbrace{\frac{t^2}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{2\pi i k} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} \, dt = \frac{2}{ik} \frac{(-1)^k i}{k} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.$$

Also ist die komplexe Fourierreihe von f

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} e^{ikt}.$$

1.5. Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen: Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

(a) stückweise stetig, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte

$$f(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f(t)$$

existieren in $\mathbb{C}$.

(b) stückweise glatt, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+)$, $f(t_{j+1}-)$ und

$$f'(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f'(t), \qquad f'(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f'(t)$$

existieren in $\mathbb{C}$.

In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein, der Funktionswert $f(t_j)$ spielt keine Rolle.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig. Ist f stetig differenzierbar, so ist f stückweise glatt.

Ist f stückweise stetig, so existieren in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte $f(t+)$ und $f(t-)$.

Beispiele: (1) Die Funktion im Beispiel1.4(1) ist stückweise glatt.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch mit $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, \pi) \\ -1 & , t \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Dann ist f stückweise glatt.

1.6. Darstellungssatz für 2π-periodische Funktionen durch Fourierreihen: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stückweise glatt. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Ist f stetig in t, so konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$. (ohne Beweis)

Beispiele: (1) Für die 2π-periodische Funktion f mit $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 1.4(1) $\hat{f}(k) = (-1)^k i/k$ für $k \geq 1$. Weiter ist

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{0<|k|\leq n} \frac{(-1)^k i}{k} (\cos(kt) + i \sin(kt)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt),$$

also

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

da f in diesen Punkten stetig ist.

An der Stelle $t = \pi$ ist f unstetig. Setzt man $t = \pi$ in die Reihe rechts ein, so erhält man den Wert 0. In der Tat ist $f(\pi-) = \pi$, $f(\pi+) = f(-\pi+) = -\pi$ und also $\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = 0$.

(2) Für die 2π-periodische Funktion f mit $f(t) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 1.4(1):

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Da f stetig und stückweise glatt ist, gilt nach Satz 1.7:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikt}, \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere erhält man für $t = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

1.7. Konvergenz im quadratischen Mittel: Der Darstellungssatz legt es nahe, für stückweise stetige (und damit insbesondere für stückweise glatte Funktionen) die folgende Normalisierung zu betrachten:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stückweise stetig mit $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$ wie in 1.6 (a), so heißt f normalisiert, wenn $f(t_j) = \frac{f(t_j+)+f(t_j-)}{2}$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Es gilt dann $f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller 2π-periodischen, stückweise stetigen, normierten Funktionen. Dann wird durch

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt \quad \text{für } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ($\to$ HM2, 15.1): Die Eigenschaften (S1) und (S2) sind klar. Zum Beweis von (S3) sei $f \in V$ mit $(f|f) = 0$, dh mit $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = 0$. Da f

stückweise stetig ist mit entsprechenden Zwischenpunkten $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$, können wir wie für stetige Funktionen ($\rightarrow$ HM2, Beispiel 15.1 (3)) einsehen, dass $f = 0$ auf jedem Intervall (t_j, t_{j+1}) gilt. Da f normalisiert ist, folgt $f = 0$ auf $[-\pi, \pi)$, also $f = 0$ auf $\mathbb{R}$ wegen der 2π-Perodizität.

Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt\Big)^{1/2}, \quad f \in V.$$

Für jedes $f \in V$ gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Insbesondere ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V, und für jedes $f \in V$ gilt

$$\Big\|f - \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k) e_k\Big\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

dh die Fourierreihe von f konvergiert im quadratische Mittel gegen f. Man beachte, dass dies für jedes $f \in V$ gilt, die punktweise Konvergenz in 1.7 jedoch nur für $f \in V$, die zusätzlich stückweise glatt sind.

2 Laplacetransformation

Wir betrachten sogenannte "Zeitfunktionen" $t \mapsto f(t)$, wobei wir uns für $t \geq 0$ interessieren (t ist der Zeitparameter). Diese Funktionen nehmen komplexe Werte an, dh konkret

- $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, aber der Verlauf von f für $t < 0$ **wird ignoriert**.

Die ersten beiden Interpretationen herrschen vor, und eine auf $[0, \infty)$ definierte Funktion f denkt man sich gegebenenfalls durch Null auf $(-\infty, 0)$ fortgesetzt.

2.1. Definition der Laplacetransformation: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf **jedem** Intervall $[0, b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar ist. Ist $s \in \mathbb{C}$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\mathscr{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{5}$$

so heißt $\mathscr{L}f(s)$ die *Laplacetransformierte von f an der Stelle s*.

Die Menge aller $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral in (5) konvergiert, bezeichnen wir mit $\Lambda(f)$.

Erinnerung: Das uneigentliche Integral ist erklärt durch

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\, dt,$$

wobei die Integrale über $[0, b]$ nach Voraussetzung existieren.

Bezeichnungen sind auch: $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, $\mathscr{L}\{f\}(s)$, $\mathscr{L}[f](s)$.

2.2. Beispiele: Wir erinnern zunächst daran, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{zt}\, dt = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z}. \tag{6}$$

Weiter gilt für $b \to \infty$: $|e^{-sb}| = e^{-b\, Re\, s} \to 0$, wenn $Re\, s > 0$ (abklingende Schwingung), und $\to \infty$, wenn $Re\, s < 0$. Für $s \neq 0$ mit $Re\, s = 0$ existiert der Limes $e^{ib\, Im\, s}$ für $b \to \infty$ nicht (periodische Schwingung).

(a) *Einheitssprung* $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ (Bezeichnungen auch $U(t)$, $1(t)$) oder *Heavisidefunktion* (als solche manchmal $H(t)$ oder $I(t)$ geschrieben). Für $s \in \mathbb{C}$ und $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st} \sigma(t)\, dt = \int_0^b e^{-st}\, dt = \begin{cases} b & , s = 0 \\ \frac{1 - e^{-sb}}{s} & , s \neq 0 \end{cases}.$$

Wir erhalten $\mathscr{L}\sigma(s) = \frac{1}{s}$ für $Re\, s > 0$, sonst keine Konvergenz des Laplaceintegrals.
(b) $f(t) = e^{at}$, wobei $a \in \mathbb{C}$. Ein Vergleich mit (a) ergibt:

$$\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s-a},$$

für $Re\, s > Re\, a$, sonst keine Konvergenz des Integrals in (5).
(c) Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1] \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$. Für $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st}\, dt = \begin{cases} 1 & , s = 0 \\ \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) & , s \neq 0 \end{cases}.$$

Hier ist also $\Lambda(f) = \mathbb{C}$. Beachte, dass gilt

$$\lim_{s \to 0} \mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = 1 = \mathscr{L}\{f\}(0)$$

(man verwende z.B. $e^{-s} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-s)^k}{k!}$ oder die Abschätzung aus HM I 7.11(11): $|\frac{1-e^{-s}}{s} - 1| \leq |s| e^{|s|}$).

Wie auch bei den Fourierreihen betrachten wir i.w. nur Funktionen, die sinnvollerweise als Signale vorkommen werden. Dabei kennen wir stückweise stetige Funktionen schon im 2π-periodischen Fall und passen die Definition nur an. Dies ist eine Regularitätseigenschaft. Zur Konvergenz des Integrals benötigt man außerdem geeignete Wachstumseigenschaften, von denen wir hier eine einfache verwenden.

2.3. Definition: Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ heißt
(a) stückweise stetig, falls es eine Folge

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

so gibt, dass für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f(t)$ und $f(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f(t)$ existieren.

(b) von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$, falls es $M > 0$ gibt mit

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und exponentiell beschränkt, falls f von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig.

Ist f stückweise stetig und (t_j) eine Folge wie in der Definition, so kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cdots \, dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig wäre.

2.4. Existenz der Laplacetransformation: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann gilt $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\} \subset \Lambda(f)$ und

$$|\mathscr{L}\{f\}(s)| \leq \frac{M}{Re\, s - \gamma} \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

Beweis. Die Voraussetzungen von Definition 2.1 sind erfüllt. Für $b > 0$ und $Re\, s > \gamma$ gilt

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)| \, dt \leq \int_0^b e^{-(Re\, s)t} \, Me^{\gamma t} \, dt = M \int_0^b e^{-(Re\, s - \gamma)t} \, dt \longrightarrow \frac{M}{Re\, s - \gamma} \; (b \to \infty).$$

Also konvergiert das Integral in (5) absolut und die Behauptung folgt. □

Dabei heißt für eine Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ das Integral $\int_0^\infty g(t) \, dt$ absolut konvergent, falls das Integral $\int_0^\infty |g(t)| \, dt$ konvergiert. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz des Integrals und die Abschätzung

$$\Big| \int_0^\infty g(t) \, dt \Big| \leq \int_0^\infty |g(t)| \, dt.$$

Bemerkung: Die Funktion $f(t) = Me^{\gamma t}$ zeigt, dass die Aussagen in Satz 2.4 "optimal" sind: nach Beispiel 2.2 gilt $\Lambda(f) = \{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ und

$$|\mathscr{L}\{f\}(s)| = \Big| \frac{M}{s - \gamma} \Big| = \frac{M}{Re\, s - \gamma}$$

für reelle $s > \gamma$.

2.5. Rechenregeln: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ.

(a) (**Linearität**) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ) und es gilt

$$\mathscr{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathscr{L}\{f\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g\}(s), \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

(b) (**Laplacetrasformation von Abbleitungen**) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ n-mal stetig differenzierbar, so dass $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)} : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ alle von exponentieller Ordnung γ sind. Dann

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f\}(s) - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0)$$

für $Re\, s > \max(\gamma, 0)$.

(c) (**Dämpfungsregel**) Ist $a \in \mathbb{C}$, so ist $t \mapsto e^{at} f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma + Re\, a$ und für $Re\, s > \gamma + Re\, a$ gilt

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s - a).$$

(d) **(Verschiebungsregel**) Ist $a > 0$, so setzen wir

$$\tau_a f : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \tau_a f(t) := \begin{cases} f(t-a) & , t \geq a \\ 0 & , t \in [0, a). \end{cases}$$

(Wir schreiben manchmal auch $\sigma(t-a) f(t-a)$ statt $\tau_a f$ und denken uns die Funktion f durch Null "nach links" fortgesetzt.) Dann ist $\tau_a f$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ_f und

$$\mathscr{L}\{\tau_a f\}(s) = e^{-as} \mathscr{L}\{f\}(s) \quad \text{für } Re\, s > \gamma_f.$$

Beweis. (a) klar.

(c) Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^b e^{-(s-a)t} f(t)\, dt,$$

dann $b \to \infty$.

(d) Für $b > a$ liefert die Substitution $t = \tau + a$

$$\int_0^b e^{-st} \tau_a f(t)\, dt = \int_a^b e^{-st} f(t-a)\, dt = \int_0^{b-a} e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = e^{-as} \int_0^{b-a} e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau,$$

nun $b \to \infty$. □

2.6. Beispiele: (a) $\sin t$ ist beschränkt auf $[0, \infty)$, dh von exponentieller Ordnung 0. Es gilt $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$. Also nach 2.2 (b)

$$\mathscr{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{2i}(\mathscr{L}\{e^{it}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-it}\}(s)) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\Big) = \frac{1}{s^2+1}$$

für $Re\, s > 0$.

(b) Auch $\cos t$ ist von exponentieller Ordnung 0. Für $Re\, s > 0$ und $b > 0$ gilt (partielle Integration!)

$$\int_0^b e^{-st} \cos t\, dt = e^{-st} \sin t \Big|_{t=0}^{t=b} + s \int_0^b e^{-st} \sin t\, dt = e^{-sb} \sin b + s \int_0^b e^{-st} \sin t\, dt.$$

Wegen $e^{-sb} \sin b \to 0$ für $b \to \infty$ folgt

$$\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{für } Re\, s > 0.$$

(c) Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome in s mit $\mathrm{Grad}\, P(s) < \mathrm{Grad}\, Q(s) = n$ und

$$Q(s) = (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ <u>verschieden</u> sind. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n}.$$

Beweis. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \to V$ die $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ auf die rechte Seite abbildet, ist linear und injektiv, aus Dimensionsgründen also surjektiv auf

$$V := \Big\{ \frac{P(s)}{Q(s)} : \mathrm{Grad}\, P(s) < n \Big\}.$$

$\square$

Man kann die Koeffizienten berechnen:

$$\alpha_k = \lim_{s \to \lambda_k} (s - \lambda_k) \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\lambda_k)}{\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

für $k = 1, \ldots, n$.

Nach 2.2 (b) ist also

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathscr{L}\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\}(s)$$

für $Re\, s > \max(Re\, \lambda_1, Re\, \lambda_2, \ldots, Re\, \lambda_n)$.

(d) $\frac{s+b}{s^2+ps+q}$ mit $b, p, q \in \mathbb{R}$, wobei $s^2 + ps + q$ keine reellen Nullstellen habe. Dann ist $s^2 + ps + q = (s - a)^2 + \omega^2$ mit $a = -p/2$ und $\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0$. Im Fall $\omega = 1$ erhalten wir für $Re\, s > a$

$$\begin{aligned}
\frac{s + b}{(s - a)^2 + 1} &= \frac{s - a}{(s - a)^2 + 1} + \frac{a + b}{(s - a)^2 + 1} \\
&= \mathscr{L}\{\cos t\}(s - a) + (a + b)\mathscr{L}\{\sin t\}(s - a) \\
&= \mathscr{L}\{e^{at} \cos t + (a + b) e^{at} \sin t\}(s)
\end{aligned}$$

nach (a), (b) und der Verschiebungsregel.

2.7. Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig, sowie $y_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die eindeutige Lösung (dh $y : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar) des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& ay(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) &=& y_0 \end{array} \right. \tag{7}$$

gegeben durch

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Es gilt nämlich $y(0) = y_0$ und (nach Produktregel und Hauptsatz)

$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt}\Big(e^{at}\big(y_0 + \int_0^t e^{-a\tau} f(\tau)\, d\tau\big)\Big) = ay(t) + e^{at} e^{-at} f(t),$$

so dass y Lösung des Problems ist. Ist $z : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine weitere Lösung, so genügt $w := y - z$ den Bedingungen $w(0) = 0$ und $w'(t) = aw(t)$ für $t \geq 0$. Wenn man nun $v(t) := e^{-at} w(t)$ betrachtet, hat man $v(0) = 0$, $v'(t) = 0$ für $t \geq 0$, woraus der Reihe nach $v = 0$, $w = 0$ und $y = z$ folgt. Also ist y die einzige Lösung des Problems.

Bemerkung: Ist f nur stückweise stetig und $(t_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge wie in Definition 2.3, so ist die in (8) definierte Funktion y stetig auf $[0, \infty)$ und stetig differenzierbar in $[0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\begin{array}{rcl} y'(t) &=& ay(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}, \\ y'(t_j \pm) &=& ay(t_j) + f(t_j \pm), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Wir betrachten auch in diesem Fall y als Lösung des Problems (7).

2.8. Die Faltung: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt. Für jedes $t \geq 0$ ist

$$\tau \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} f(\tau) g(t - \tau) & , \tau \in [0, t] \\ 0 & , \tau > t \end{array} \right.$$

stückweise stetig und über $[0, t]$ Riemann-integrierbar. Die Funktion

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{C}, h(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$$

ist stetig und exponentiell beschränkt und heißt <u>Faltung</u> von f und g, geschrieben $h = f * g$.

Bemerkung: (a) Es gilt $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau)\, d\tau = (g * f)(t)$.

(b) Es gilt

$$(\alpha f_1 + f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + f_2 * g, \quad f * (\beta g_1 + g_2) = \beta(f * g_1) + f * g_2$$

und $(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2)$.
(c) Setzen wir in der Situation von 2.7: $g(t) := e^{at}$, so schreibt sich (8) als

$$y(t) = e^{at} y_0 + (g * f)(t), \quad t \geq 0. \tag{9}$$

(d) Es gilt $(\sigma * f)(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, dh $\sigma * f$ ist (für stetiges f) diejenige Stammfunktion von f, die in 0 verschwindet.

Beweis. Nur exponentielle Beschränktheit: Es gelte $|f(t)|, |g(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann ist

$$|h(t)| \leq \int_0^t M e^{\gamma \tau} M e^{\gamma(t-\tau)}\, d\tau = M^2 t e^{\gamma t} \leq M^2 M_\varepsilon e^{(\gamma+\varepsilon)t}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. □

2.9. Die Faltungsregel: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s) \mathscr{L}\{g\}(s), \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

Anwendung: In der Situation von 2.7 wenden wir die Laplacetransformation an auf (9) und erhalten (wenn f exponentiell beschränkt und $Re\, s$ hinreichend groß ist):

$$\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = \mathscr{L}\{e^{at} y_0\}(s) + \mathscr{L}\{e^{at}\}(s) \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-a}\, y_0 + \frac{1}{s-a}\, \mathscr{L}\{f(t)\}(s).$$

Damit ergibt sich als "Lösungsmethode" für (7):

(i) Bestimme zu $f(t)$ die Laplacetransformation $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) =: F(s)$.

(ii) Setze $Y(s) := \frac{y_0}{s-a} + \frac{F(s)}{s-a}$.

(iii) Bestimme $y(t)$ so, dass $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$.

Dann erwarten wir, dass y Lösung von (7) ist.

Problem: Ist die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$) in (iii) eindeutig bestimmt?

[I.a. nicht: Für $\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t) & , t \neq 1 \\ c & , t = 1 \end{cases}$ und $c \neq y(1)$ gilt $\mathscr{L}\{\tilde{y}\} = \mathscr{L}\{y\}$.

Aber: Sind y_1, y_2 <u>stetig</u> und $\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\tilde{y}\}$, so folgt $y_1 = y_2$.]

Beweis. Nur im Falle $|f(t)| \le 1$, $|g(t)| \le 1$, $t \ge 0$. Für $b > 0$ und $Re\, s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^b e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt = \int_0^b \int_0^t e^{-s\tau} f(\tau) e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
= & \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_\tau^b e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\, dt\, d\tau = \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^{b-\tau} e^{-sr} g(r)\, dr\, d\tau \\
= & \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \int_0^b e^{-sr} g(r)\, dr - \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_{b-\tau}^b e^{-sr} g(r)\, dr\, d\tau.
\end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ konvergiert der erste Term gegen $\mathscr{L}\{f\}(s)\mathscr{L}\{g\}(s)$, den zweiten bezeichnen wir mit $R(b)$.

Wir schreiben $\xi = Re\, s$. Dann ist $\xi > 0$ und (nach den Voraussetzungen an f, g):

$$\begin{aligned}
|R(b)| & \le \int_0^b e^{-\xi\tau} |f(\tau)| \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r} |g(r)|\, dr\, d\tau \\
& \le \int_0^b e^{-\xi\tau} \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r}\, dr\, d\tau \\
& \le \int_0^b e^{-\xi\tau} \tau e^{-\xi(b-\tau)}\, d\tau \\
& = \frac{b^2}{2} e^{-\xi b} \longrightarrow 0 \quad (b \to \infty).
\end{aligned}$$

□

2.10. Beispiele: Für $t \ge 0$ gilt

$$\sigma * \sigma(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t d\tau = t.$$

Also ist nach Faltungs- und Dämpfungsregel (hier ist $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\}(s) & = \mathscr{L}\{\sigma\}(s)\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{te^{at}\}(s) & = \mathscr{L}\{t\}(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$(\sigma * \sigma) * \sigma(t) = \int_0^t \tau\sigma(t-\tau)\, d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \ge 0.$$

Also (wieder mit $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\frac{t^2}{2}\}(s) & = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{t^2 e^{at}\}(s) & = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt (Beweis durch Induktion!):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sigma * \sigma * \ldots * \sigma}_{n+1}(t) &= \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0. \\
\mathscr{L}\{\frac{t^n}{n!}\}(s) &= \frac{1}{s^{n+1}}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{t^n e^{at}\}(s) &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

2.11. Partialbruchzerlegung:

Komplexe Partialbruchzerlegung Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome mit $\mathrm{Grad}\, P(s) < \mathrm{Grad}\, Q(s) = n$. Dann existieren verschiedene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ und

$$Q(s) = \mu(s-\lambda_1)^{k_1} \cdot (s-\lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (s-\lambda_m)^{k_m},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C}$. Die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sind dabei die verschiedenen komplexen Nullstellen von $Q(s)$ und $k_1, k_2, \ldots, k_m$ deren jeweilige Vielfachheiten.

Es gibt dann komplexe Koeffizienten $\alpha_l^{(j)}$ ($j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, k_j$) so, dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{s-\lambda_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(s-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(s-\lambda_1)^{k_1}} + \\
&\quad + \frac{\alpha_1^{(2)}}{s-\lambda_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(s-\lambda_2)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(s-\lambda_2)^{k_2}} + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + \frac{\alpha_1^{(m)}}{s-\lambda_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(s-\lambda_m)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(s-\lambda_m)^{k_m}}.
\end{aligned}$$

M.a.W. $\frac{P(s)}{Q(s)}$ ist eine Linearkombination der Funktionen $\frac{1}{(s-\lambda_j)^l}$ ($j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, k_j$). Für die Koeffizienten höchster Ordnung hat man etwa

$$\alpha_{k_j}^{(j)} = \lim_{s \to \lambda_j} (s-\lambda_j)^{k_j} \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir erhalten aus 2.10:

$$\begin{aligned}
\frac{P(s)}{Q(s)} &= \mathscr{L}\Big\{\alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \alpha_2^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \ldots + \alpha_{k_1}^{(1)} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{\lambda_1 t} + \\
&\quad + \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \alpha_2^{(2)} t e^{\lambda_2 t} + \ldots + \alpha_{k_2}^{(2)} \frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} e^{\lambda_2 t} + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + \alpha_1^{(m)} e^{\lambda_m t} + \alpha_2^{(m)} t e^{\lambda_m t} + \ldots + \alpha_{k_m}^{(m)} \frac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!} e^{\lambda_m t}\Big\}(s)
\end{aligned}$$

für $Re\, s > \max\{Re\, \lambda_1, Re\, \lambda_2, \ldots, Re\, \lambda_m\}$.

Beispiel:
$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+i},$$
hier sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Wir lesen ab
$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathscr{L}\{\sigma(t) - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it}\}(s) = \mathscr{L}\{\sigma(t) - \cos t\}(s).$$

Reelle Partialbruchzerlegung: Sind $P(s)$, $Q(s)$ reelle Polynome mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s)$, so treten nicht-reelle Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf und können zusammengefasst werden:
$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{s-a+i\omega} + \frac{\overline{\alpha}}{s-a-i\omega} &= \frac{2(Re\,\alpha)(s-a) + 2\omega Im\,\alpha}{(s-a)^2+\omega^2} \\ &= \mathscr{L}\{2(Re\,\alpha)e^{at}\cos(\omega t) + 2(Im\,\alpha)e^{at}\sin(\omega t)\}(s)\end{aligned}$$
und
$$\frac{\beta}{(s-a+i\omega)^2} + \frac{\overline{\beta}}{(s-a-i\omega)^2} = \frac{2(Re\,\beta)(s-a)^2 + 4\omega(Im\,\beta)(s-a) - 2(Re\,\beta)\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$
Hierbei sind a, ω reell und α, β komplex. Mittels der Formeln $\sin(\omega t) = Im\,e^{i\omega t}$, $\cos(\omega t) = Re\,e^{i\omega t}$ sieht man ein, dass
$$\mathscr{L}\{t\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}, \quad \mathscr{L}\{t\sin(\omega t)\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$
für $Re\,s > 0$. Also ist
$$\frac{\beta}{(s-a+i\omega)^2} + \frac{\overline{\beta}}{(s-a-i\omega)^2} = \mathscr{L}\{2(Re\,\beta)te^{at}\cos(\omega t) + 2(Im\,\beta)te^{at}\sin(\omega t)\}(s).$$

Bemerkung: Die reelle Partialbruchzerlegung, kann man auch benutzen um Integrale von reelen Funktionen zu berechnen.

2.12. Differentiation für stetige stückweise differenzierbare Funktionen: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig und von exponentieller Ordnung γ und sei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \to \infty$ eine Folge derart, dass f in $[0,\infty)\setminus\{t_m : n \in \mathbb{N}_0\}$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist und $f', f'', ..., f^{(n)}$ stückweise stetig sind im folgenden Sinne:

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $k = 1, ..., n$ gilt:

(i) $f^{(k)} : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f^{(k)}(t_j+) = \lim\limits_{t\to t_j+} f^{(k)}(t)$ und $f^{(k)}(t_{j+1}-) = \lim\limits_{t\to t_{j+1}-} f^{(k)}(t)$ existieren.

In den Punkten t_j selber sind $f^{(k)}$ nicht unbedingt definiert, in diesem Fall setzen wir $f(k)(t) := (f^{(k)}(t_j+) + f^{(k)}(t_j-))/2$. Der Funktionswert spielt aber für die Integration keine Rolle.

Sind $f', f'', ..., f^{(n)}$ auch von exponentieller Ordnung γ dann gilt

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f\}(s) - f^{(n-1)}(0+) - sf^{(n-2)}(0+) - \ldots - s^{n-2}f'(0+) - s^{n-1}f(0+)$$

für $Re\, s > \max(\gamma, 0)$.

Bemerkung: Unter den gegebenen Voraussetzungen kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cdots\, dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig differenzierbar wäre.

Beweis. Man kann die Aussage mit Induktion zeigen. Wir zeigen erst die Aussage für $n = 1$. Für $b > 0$ und $Re\, s > \gamma$ gilt mittels partieller Integration

$$\int_0^b e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{b} + s \int_0^b e^{-st} f(t)\, dt = e^{-sb} f(b) - f(0) + s \int_0^b e^{-st} f(t)\, dt$$

Dabei beachte man, dass etwa für $t_1 < b < t_2$ die Funktion f betrachtet auf $[0, t_1]$ und auf $[t_1, b]$ stetig differenzierbar ist und man partielle Integration auf jedes dieser Teilintervalle anwendet, wobei am Rand die einseitigen Grenzwerte zu nehmen sind. Man hat dann

$$e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{t_1-} + e^{-st} f(t)\Big|_{t=t_1+}^{b} = e^{-st_1} f(t_1-) - f(0) + e^{-sb} f(b) - e^{-st_1} f(t_1+) = e^{-sb} f(b) - f(0)$$

wegen der Stetigkeit von f in t_1. Die Behauptung folgt mit $b \to \infty$.

Der induktionsschritt ist ähnlich wie in dem Fall der n-mal stetig differentierbaren Funktionen. $\square$

Bemerkung: Betrachtet man nicht $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, sondern $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, so betrachtet man die Ableitung $f'(t)$ nur für $t > 0$ und hat in der Formel den rechtsseitigen Grenzwert $f(0+)$ zu nehmen:

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+).$$

Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0, 1] \\ 2 - t & , t \in (1, 2] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Hier gilt $f'(t) = 1$ für $t \in (0,1)$, $f'(t) = -1$ für $t \in (1,2)$ und $f'(t) = 0$ für $t > 2$. Setzt man $g(t) = 1$ für $t \in (0,1)$ und $g(t) = 0$ sonst, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{g\}(s) &= \frac{1-e^{-s}}{s} \\
\mathscr{L}\{f\}(s) &= \mathscr{L}\{g * g\}(s) = \Big(\frac{1-e^{-s}}{s}\Big)^2 \\
\mathscr{L}\{f'\}(s) &= \mathscr{L}\{g - \tau_1 g\}(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} - e^{-s}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = s\Big(\frac{1-e^{-s}}{s}\Big)^2 = s\mathscr{L}\{f\}(s)
\end{aligned}$$

für $Re\, s > 0$.

2.13. Anwendung: Wir können die Regeln aus 2.12 zur Lösung von Anfangswertproblemen für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verwenden.

(a) RL-Kreis: In einem Stromkreis mit Widerstand R und einer Spule der Induktivität L gilt, wenn wir die Spannung $U(t)$ anlegen, für den Strom $J(t)$:

$$J'(t) = -\frac{R}{L}J(t) + \frac{U(t)}{L}.$$

Nehmen wir speziell $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und $J(0) = 0$, so erhalten wir nach Laplacetransformation:

$$s\mathscr{L}\{J\}(s) = -\frac{R}{L}\mathscr{L}\{J\}(s) + \frac{U_0}{L}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

also

$$\mathscr{L}\{J\}(s) = \frac{U_0}{L}\,\frac{\omega}{(s+\frac{R}{L})(s^2+\omega^2)},$$

und nach reeller Partialbruchzerlegung

$$\mathscr{L}\{J\}(s) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\,\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\,\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{U_0 R}{R^2+\omega^2 L^2}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

was zu

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R^2+\omega^2 L^2}\Big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\Big)$$

führt. Mit der Phasenverschiebung $\varphi = \arctan(\frac{\omega L}{R})$ erhalten wir

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\,\sin(\omega t - \varphi).$$

Im Grenzfall $L = 0$ haben wir $J = U/R$, also $J(t) = \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$ und keine Phasenverschiebung.

2.14. Andere Anwendungen:

(b) RLC-Kreis: Wir nehmen in den Stromkreis zusätzlich einen Kondensator der Kapazität C auf. Die an ihm entstehende Spannung ist $U_c(t) = \frac{1}{C}q(t)$, wobei $q(t)$ die Ladung bezeichnet. Das führt zur Differentialgleichung

$$LJ'(t) + RJ(t) + \frac{1}{C}q(t) = U(t)$$

und nach Division durch L und Ableitung nach t zur Differentialgleichung

$$J''(t) + \frac{R}{L}J'(t) + \frac{1}{LC}J(t) = \frac{\omega}{L}U_0\cos(\omega t),$$

wenn wir dieselbe Wechselspannung wie in (a) anlegen. Wir setzen $F(s) = \mathscr{L}\{J\}(s)$ und wollen die Lösung für $J(0) = J'(0) = 0$ bestimmen. Laplacetransformation ergibt

$$s^2F(s) + \frac{R}{L}sF(s) + \frac{1}{LC}F(s) = \frac{\omega U_0}{L}\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

also

$$F(s) = \frac{\omega U_0}{L}\frac{s}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})(s^2+\omega^2)}.$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners: Neben den offensichtlichen $\pm i\omega$ sind dies die Nullstellen von $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$. Wir diskutieren den Fall (schwache Dämpfung), dass diese Nullstellen konjugiert komplex sind, dh also dass $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ gilt. Wir setzen $\psi := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, $\alpha := \frac{R}{2L}$ und erhalten

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s+\alpha+i\psi)(s+\alpha-i\psi) = (s+\alpha)^2 + \psi^2.$$

Reelle Partialbruchzerlegung führt also auf

$$\frac{s}{((s+\alpha)^2+\psi^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\psi^2} + \frac{cs+d}{s^2+\omega^2},$$

und wir erkennen, dass $J(t)$ eine Linearkombination von

$$e^{-\alpha t}\cos(\psi t), \quad e^{-\alpha t}\sin(\psi t), \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t)$$

ist. Im ungedämpften Fall $R = 0$ ist $\alpha = 0$, und für $\psi^2 \neq \omega^2$ ist die Lösung eine Linearkombination von $\cos(\psi t)$, $\sin(\psi t)$, $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$. Im Resonanzfall $\alpha = 0$, $\psi^2 = \omega^2$ erhalten wir als Nenner $(s^2+\omega^2)^2 = (s-i\omega)^2(s+i\omega)^2$ und nach der Vorbemerkung ist

$$J(t) = \frac{U_0}{2L}t\sin(\omega t),$$

dh eine sich aufschaukelnde Schwingung ("Resonanzkatastrophe").

(c) Im Fall einer allgemeinen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= f(t), \quad t \geq 0, \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, \quad \ldots &, y'(0) = y_1, y(0) = y_0 \end{cases}, \tag{S}$$

mit $a_n \neq 0$ setzt man $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, verwendet die Laplacetransformation und 2.13 und erhält eine algebraische Gleichung für $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(s^k Y(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j \Big).$$

Diese kann man nach $Y(s)$ auflösen

$$Y(s) = \frac{F(s) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} a_k s^{k-1-j} y_j}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k},$$

und danach $y(t)$ mit $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$ mittels (reeller oder komplexer) Partialbruchzerlegung bestimmen.

Beispiel: $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$. Mittels Laplacetransformation erhalten wir für $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$:

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) - 2 - s \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = \frac{1}{s-2},$$

also

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \Big(\frac{1}{s-2} + s - 2 \Big) = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{s-2}$$

(hier haben wir die Partialbruchzerlegung direkt abgelesen). Folglich ist die Lösung gegeben durch

$$y(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t} + e^{2t}, \quad t \geq 0,$$

was man zur Probe nachrechnen kann.

2.15. Sprungantwort eines Systems: Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (S). Die Sprungantwort h des Systems ist die Lösung y von (S) zur äußeren Anregung $f(t) = \sigma(t)$ (Einheitssprung) mit Anfangswerten $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$.

Nach 2.14 (c) haben wir für die Laplacetransformierte der Sprungantwort

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{\mathscr{L}\{\sigma(t)\}(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)}.$$

Beispiel: Das System sei beschrieben durch

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by(t) & = & f(t), \quad t \geq 0 \\ y'(0) = y_1, & & y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Die Sprungantwort $h(t)$ ist gegeben durch

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s^2 + as + b)s}.$$

Im Beispiel 2.14 (a) ist die Sprungantwort $h(t)$ gegeben durch

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s + \frac{R}{L})s} = \frac{L}{R}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\Big),$$

dh durch

$$h(t) = \frac{L}{R}\Big(\sigma(t) - e^{-\frac{R}{L}t}\Big).$$

2.16. Anfangswertsatz: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt

$$\lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(0+).$$

(Der Limes bezieht sich auf reelle s!)

Beweis. Es gelte $\gamma \geq 0$ und $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $b > 0$ mit $|f(t) - f(0+)| \leq \varepsilon$ für $t \in (0, b)$. Wegen $\int_0^\infty se^{-st}\,dt = 1$ gilt für $s > \gamma$:

$$\begin{aligned} |s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+)| &\leq \int_0^\infty se^{-st}|f(t) - f(0+)|\,dt \\ &\leq \int_0^b se^{-st}\,\varepsilon\,dt + \int_b^\infty se^{-st}\,2Me^{\gamma t}\,dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{s}{s-\gamma}\,2M\int_{b(s-\gamma)}^\infty e^{-r}\,dr \\ &\longrightarrow \varepsilon \quad (s \to \infty), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $t = \frac{r}{s-\gamma}$ substituiert haben. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel (aus 2.15): Die Lösung von $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ genügt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{(s+a)y_0 + y_1 + \mathscr{L}\{f\}(s)}{s^2 + as + b},$$

und $y : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ist zweimal stetig differenzierbar, wenn $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig und exponentiell beschränkt ist. Wir erhalten

$$\lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{y\}(s) = y_0 = y(0+).$$

2.17. Endwertsatz: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und $f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t)$ existiere. Dann ist f beschränkt und es gilt

$$\lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(\infty).$$

Beweis. Es gelte $|f(t)| \le M$, $t \ge 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$ mit $|f(t) - f(\infty)| \le \varepsilon$ für $t \ge c$. Dann gilt für $s > 0$:

$$\begin{aligned}
|s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(\infty)| &\le \int_0^\infty se^{-st}|f(t) - f(\infty)|\,dt \\
&\le \int_0^c se^{-st}\,2M\,dt + \int_c^\infty se^{-st}\,\varepsilon\,dt \\
&\le \varepsilon + 2M\int_0^{cs} e^{-r}\,dr \\
&\le \varepsilon + 2Mcs \\
&\longrightarrow \varepsilon \quad (s \to 0+),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder $t = \frac{r}{s}$ substituiert haben. □

Warnung: In 2.16 folgt die Existenz von $f(0+)$ aus der Voraussetzung an f (stückweise Stetigkeit). Hier ist die Existenz von $f(\infty)$ **vorausgesetzt**. Selbst wenn $\lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s)$ existiert, muss $f(\infty)$ nicht unbedingt existieren.

Beispiel: Die Funktion $\cos t$ ist beschränkt und $\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Es gilt $s\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s^2}{s^2+1} \to 0$ für $s \to 0+$, aber $\lim_{t\to\infty} \cos t$ existiert nicht.

2.18. Korrespondenzen: Gilt $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, so nennt man $f(t)$ die Originalfunktion und $F(s)$ die Bildfunktion. Häufig schreibt man dann

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \quad \text{oder} \quad F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$$

und nennt dies eine Korrespondenz (der ausgefüllte Punkt steht auf der Seite der Bildfunktion). Gebräuchlich sind Tafeln für Korrespondenzen.

Beispiele: $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$, $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$. Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, so gilt $e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$.

3 Komplexe Analysis

3.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, wenn der Limes

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt $F'(z_0)$ die komplexe Ableitung von F in z_0.

Die Funktion F heißt holomorph in G, falls F in **jedem** $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

Beispiele: (a) $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = 1$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $F(z) = z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) $F(z) = e^z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

3.2. Rechenregeln: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und seien $F, H : G \to \mathbb{C}$ in G holomorph. Dann sind $F + H$, $F \cdot H$ in G holomorph und

$$(F+H)'(z) = F'(z) + H'(z), \qquad (F \cdot H)'(z) = F'(z)H(z) + F(z)H'(z), \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Ist $H \neq 0$ in G, so ist auch $\frac{F}{H}$ holomorph in G und

$$\left(\frac{F}{H}\right)'(z) = \frac{F'(z)H(z) - F(z)H'(z)}{H(z)^2}, \qquad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner $\neq 0$ ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit.

Ebenso gelten die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion auch für die komplexe Differenzierbarkeit. Die Beweise lassen sich übertragen.

Bemerkung: Ist F in G holomorph, so ist F in G stetig.

Beispiele: (1) $F(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = nz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Jedes Polynom $P(z)$ mit komplexen Koeffizienten ist auf $\mathbb{C}$ holomorph.

(2) $F(z) = z^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $F'(z) = -nz^{-n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jede rationale Funktion $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $P(z)$, $Q(z)$ komplexe Polynome sind, ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

(3) $F(z) = e^{1/z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $F'(z) = e^{1/z}(-z^{-2})$ für $z \neq 0$.

3.3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Durch $u(x,y) := (Re\,F)(x+iy)$ und $v(x,y) = (Im\,F)(x+iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x+iy \in G$ erhält man eine Funktion $G \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$, die man mit den Methoden von Kapitel 19 in HM2 (mehrdimensionale Differentialrechnung) behandeln kann.

Ist F in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar, sieht man anhand der Definition (mit $x + iy_0 \to x_0 + iy_0$):

$$F'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).$$

Betrachtet man $x_0 + iy \to x_0 + iy_0$, erhält man

$$F'(z_0) = \partial_y v(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0),$$

so dass im Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-Dgln) für u und v, die also auf G erfüllt sind, wenn F holomorph auf G ist. Umgekehrt gilt der

Satz: Ist $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ eine C^1-Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch $F(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ definierte Funktion in G holomorph.

Beispiel: Für die Funktion $F(z) = \overline{z}$ gilt $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Die Funktion ist also nicht holomorph.

Bemerkung: Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation von $x + iy$ mit der komplexen Zahl $a + ib$ entspricht der Multiplikation des Vektors $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. In diesem Sinne entspricht $F'(z_0)$ der Matrix $\begin{pmatrix} Re\,F'(z_0) & -Im\,F'(z_0) \\ Im\,F'(z_0) & Re\,F'(z_0) \end{pmatrix}$. Die Ableitung im Sinne von HM2 Kapitel 19 (dh die Jacobimatrix) von $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ ist hingegen $\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$. Beim Vergleich erhält man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

3.4. Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten (a_n) und Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch die Potenzreihe gegebene Funktion

$$F : K(z_0, R) \to \mathbb{C}, z \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

holomorph in $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, und es gilt

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \qquad |z - z_0| < R.$$

Beispiele: $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sind auf $\mathbb{C}$ holomorph.

3.5. Holomorphie von Laplacetransformierten: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann ist $F := \mathscr{L}\{f\}$ auf $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ holomorph und

$$F'(s) = \mathscr{L}\{-tf(t)\}(s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

Beweis. Nur für beschränktes f, dh $|f(t)| \leq M$. Sei $Re\, s > 2a > 0$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h| \leq a$. Dann gilt für jedes $b > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} &= \int_0^\infty \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} f(t)\, dt \\ &= \int_0^b \frac{e^{-ht} - 1}{h} e^{-st} f(t)\, dt + \int_b^\infty \left(\frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right) (-t) e^{-st} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert für $h \to 0$ gegen

$$\int_0^b (-t) e^{-st} f(t)\, dt$$

(das geht wie in 2.2). Den Betrag des Integranden im zweiten Integral schätzt man ab:

$$\leq \underbrace{\left| \frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right|}_{\leq e^{|h|t}} t e^{-(Re\, s)t} M \leq M t e^{-at}.$$

Das Integral hierüber wird für große b klein. □

Folgerung: Unter den obigen Voraussetzungen ist F in $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ beliebig oft komplex differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathscr{L}\{(-t)^n f(t)\}(s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

3.6. Kurvenintegrale: Eine <u>Kurve</u> ist hier eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, für die es $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so gibt, dass γ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, stetig differenzierbar ist. Die Kurve γ heißt <u>einfach geschlossen</u>, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und γ auf $[a, b)$ injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt <u>positiv orientiert</u>, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.

Dabei heißt γ in $t_* \in [a, b]$ differenzierbar, falls der Limes

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \to t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}$$

in $\mathbb{C}$ existiert.

Bemerkung: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to G$ differenzierbar. Dann ist $F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar und

$$(F \circ \gamma)^{\cdot}(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \quad t \in [a,b],$$

vergleiche Bemerkung in 3.3.

Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(z)\,dz := \int_a^b F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt,$$

wobei die rechte Seite als $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt$ zu verstehen ist, wenn $t_0, \ldots, t_n$ wie oben in der Definition sind.

Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Abschätzung: Sind F und γ wie in der Definition, so gilt

$$\Big| \int_\gamma F(z)\,dz \Big| \leq L(\gamma)\, \max\{|F(z)| : z \in \gamma([a,b])\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet (siehe HM 2, 19.6).

Wichtiges Beispiel: Sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$. Dann ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, und es gilt $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sei $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} r^n\, e^{itn}\, ir\, e^{it}\,dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Für $n = -1$ ist das Kurvenintegral also $= 2\pi i$. Für $n \neq -1$ erhalten wir

$$= ir^{n+1} \Big[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big]_0^{2\pi} = 0,$$

da $e^{2\pi i(n+1)} = 1$. Beachte, dass F für $n \geq 0$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und für $n < 0$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist.

3.7. Cauchyscher Integralsatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für jede einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ gilt dann

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 0.$$

Den Begriff einfach zusammenhängend werden wir genau in der HM2 definieren siehe http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etit2014s/media/hm2etit-s14.pdf, Kapitel 20.3. Anschaulich bedeuted einfach zusammenhängend hier “ohne Löcher”. Z.B. sind konvexe Gebiete einfach zusammenhängend. Dabei heißt $G \subset \mathbb{C}$ konvex, falls zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0,1]\}$ in G enthalten ist. Auch $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist einfach zusammenhängend.

Beispiel: Damit ist das Integral im Beispiel von 3.6 $= 0$ für $n \geq 0$.

Bemerkungen zum Beweis: Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage äquivalent ist zur Existenz einer holomorphen Funktion $H : G \to \mathbb{C}$ mit $H' = F$ auf G (es ist dann nämlich

$$\int_\gamma H'(z)\,dz = \int_a^b H'(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b (H \circ \gamma)^{\cdot}(t)\,dt = H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)) = 0.$$

Ist G konvex, so erhält man ein solches H, indem man $z_* \in G$ fixiert und $H(z) := \int_{S[z_*,z]} F(w)\,dw$ setzt. Gilt der Satz für "Dreiecke" γ, so hat man für $z, z_0 \in G$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - F(z_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{z-z_0}\int_{S[z_0,z]} (F(w)-F(z_0))\,dw\Big| \\ &\leq \frac{1}{|z-z_0|}\,|z-z_0|\,\max\{|F(w)-F(z_0)| : w \in S[z_0,z]\} \to 0\end{aligned}$$

für $z \to z_0$, da F in z_0 stetig ist.

Es reicht deshalb, die Aussage für "Dreiecke" γ zu zeigen (Satz von Cauchy-Goursat).

Beispiele: (1) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $\int_\gamma z^n\,dz = 0$, da F auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, $\mathbb{C}$ konvex ist und γ einfach geschlossen.

(2) Sei γ wie eben und $F(z) = e^z$. Nach denselben Argumenten wie in (1) ist $\int_\gamma e^z\,dz = 0$.

(3) $F(z) = 1/z$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, aber $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

3.8. Cauchysche Integralformel: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z, welches "innerhalb von γ" liegt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Beweisidee: Man überlegt sich, dass 3.7 auch noch gilt, wenn die Funktion auf G stetig und in $G\setminus\{z\}$ holomorph ist. Diese Variante von 3.7 wendet man auf die Funktion $\zeta \mapsto \frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta - z}$ an und beachtet das Beispiel aus 3.6 für $n = -1$:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - F(z)\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=1}.$$

Beispiele: (1) Die Anwendung auf $F(\zeta) = 1$ gibt das Ergebnis von 3.6 im Fall $n = -1$ (man nehme $z = 0$).

(2) Nimmt man $F(\zeta) = e^\zeta$ und $z = 0$, sowie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so erhält man

$$\int_\gamma \frac{e^\zeta}{\zeta}\, d\zeta = 2\pi i.$$

3.9. Folgerungen: (a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar (man muss hier "unter dem Integralzeichen differenzieren", was sich aber rechtfertigen lässt). Unter den Voraussetzungen von 3.8 gilt

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist G offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so gilt

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Die Reihe konvergiert dabei absolut auf $\{z : |z - z_0| < R\}$

Beweis. Verwende die Formel in 3.8, wobei γ der Kreis um z_0 mit Radius R ist und $\{z : |z - z_0| \leq R\} \subset G$ gilt. Entwickle den Integranden in eine geometrische Reihe

$$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{F(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Nun vertausche man Integration und Reihe (was man darf, da für $|z - z_0| \leq \rho < R$ die Reihe gleichmäßig konvergiert) und verwende die Formel in (a). □

3.10. Laurententwicklung: Ist G offen, $z_0 \in G$ und $F : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von F. Es gibt dann eindeutig bestimmte Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{Z}$, derart, dass gilt

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Konvergenz der Reihe ist zu verstehen als Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{-1}$ (Hauptteil der Reihe) und $\sum_{k=0}^{\infty}$ (Nebenteil der Reihe). Die Reihe konvergiert dabei absolut. Der Koeffizient a_{-1} heißt Residuum von F in z_0, geschrieben

$$\operatorname{res}(F; z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität z_0 von F heißt hebbare Singularität, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, Pol n-ter Ordnung, falls $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -n$ ist, und wesentliche Singularität sonst.

Beweisidee zur Laurententwicklung: Nur für $z_0 = 0$. Ist $0 < \rho_0 < |z| < \rho_1 < R$, so gilt wegen 3.8:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta =: F_1(z) - F_0(z),$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \to G$, $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$. Die Funktionen $F_1(z)$ und $F_0(\frac{1}{z})$ lassen sich in Potenzreihen um 0 entwickeln, die für $|z| < \rho_1$ bzw. $|z| < 1/\rho_0$ konvergieren. Diese ergeben Neben- und Hauptteil der Laurentreihe.

Beispiel: (a) $F(z) = z^{-n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, hat in $z_0 = 0$ einen Pol n-ter Ordnung. Dabei gilt $\operatorname{res}(z^{-1}; 0) = 1$ und $\operatorname{res}(z^{-n}; 0) = 0$ für $n \geq 2$.

(b) $F(z) = e^{2/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Wegen $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{z^{-k}}{k!}$ für $z \neq 0$ gilt $\operatorname{res}(F; 0) = 2$.

Bemerkung (ohne Beweis): Die Funktion F hat einen Pol in z_0 genau dann, wenn $\lim_{z \to z_0} |F(z)| = \infty$ gilt. Die Singularität in z_0 ist hebbar genau dann, wenn $\lim_{z \to z_0} F(z)$ existiert.

3.11. Residuensatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und $\gamma : [a, b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_m \in G$ verschieden und innerhalb von γ, und sei $F : G \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(F; z_j).$$

Beweis. Mithilfe von 3.7 ist das Kurvenintegral links

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} F(z) \, dz,$$

wobei γ_j jeweils ein kleiner Kreis um z_j ist, so dass man die Laurententwicklung von F um z_j verwenden kann. Dann vertauscht man Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz!) und verwendet das Beispiel in 3.6. □

3.12. Berechnung von Residuen: (a) Besitzt F in z_0 einen höchstens n-fachen Pol ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n F(z)\Big)\right)\Bigg|_{z=z_0}.$$

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{und} \quad G(z) := (z-z_0)^n F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-z_0)^k$$

für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0. Vergleich mit der Potenzreihe von $G(z)$ ergibt $a_{-1} = \frac{G^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$. □

(b) Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $G(z_0) \neq 0$, $H(z_0) = 0$, $H'(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}.$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist z_0 einfache Nullstelle von $H(z)$, also ist z_0 hebbare Singularität von $(z-z_0)F(z)$. Damit ist z_0 einfache Polstelle von F und (a) ergibt die angegebene Formel. □

3.13. Logarithmus und allgemeine Potenz: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man schreiben als $z = |z|e^{i\varphi}$. Dabei heißt φ Argument von z, geschrieben $\arg z$. Das Argument ist **nicht eindeutig**: Ist φ ein Argument von z, so auch $\varphi + 2k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Der Hauptzweig des Arguments $\operatorname{Arg} z$ nimmt für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ Werte in $(-\pi, \pi)$ an.

Definition: Der Hauptzweig Log des Logarithmus ist gegeben durch

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Andere Zweige des Logarithmus erhält man, indem man andere Zweige des Arguments betrachtet.

Bemerkung: $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \{w \in \mathbb{C} : |Im\, w| < \pi\}$ ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung exp. Es gilt

$$\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allgemeine Potenz: Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$$

den Hauptzweig der α-ten Potenz.

Wurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man für den Hauptzweig der n-ten Wurzel

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp(i \operatorname{Arg} z/n), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Berücksichtigt man die anderen Werte des Arguments, so sieht man, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n-te Wurzeln besitzt.

4 Fouriertransformation

4.1. Fouriertransformation: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar (aib), dh $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$. Die Fouriertransformierte von f definiert man für $\omega \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathscr{F} f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt.$$

Das Integral konvergiert dabei für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ absolut, da $|e^{-i\omega t} f(t)| = |f(t)|$ für jedes t gilt und f absolut integrierbar ist.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{-a|t|}$, ist für $a > 0$ absolut integrierbar. Es gilt

$$\mathscr{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

4.2. Fourierinversionformel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass $\mathscr{F} f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \mathscr{F} f(\omega)\, d\omega.$$

Interpretation: f ist kontinuierliche Summe von Schwingungen $e^{it\omega}$ und $\frac{\mathscr{F} f(\omega)}{2\pi}$ entspricht den Beitrag der Schwingung $e^{it\omega}$.

4.3. Rechenregeln für die Fouriertransformation: Im folgenden sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar.

(a) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathscr{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F} f(\frac{\omega}{a})$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathscr{F}\{f(t-b)\}(\omega) = e^{-i\omega b} \mathscr{F} f(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathscr{F}\{e^{itb} f(t)\}(\omega) = \mathscr{F} f(\omega - b)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(d) Ist f stetig und (stückweise) differenzierbar derart, dass f' wieder stückweise stetig und absolut integrierbar ist, so gilt

$$\mathscr{F}\{f'\}(\omega) = i\omega \mathscr{F} f(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(e) Ist $t \mapsto t^n f(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ absolut integrierbar, so ist $\mathscr{F} f$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathscr{F} f)^{(n)}(\omega) = \mathscr{F}\{(-it)^n f(t)\}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Beweise von (a), (b), (c), (e) sind denen für die Laplacetranformation sehr ähnlich. Bei (d) beachte man, dass absolute Integrierbarkeit von f' Existenz der Grenzwerte $f(\pm\infty)$ impliziert, da etwa

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(t)\, dt$$

für $b \to \infty$ konvergiert. Da f außerdem absolut integrierbar ist, muss $f(\pm\infty) = 0$ gelten. Für $a, b > 0$ ist dann mittels partieller Integration

$$\int_{-a}^b e^{-i\omega t} f'(t)\, dt = e^{-i\omega t} f(t)\Big|_{-a}^b + i\omega \int_{-a}^b e^{-i\omega t} f(t)\, dt,$$

und (d) folgt für $a, b \to \infty$. $\square$

Beispiel Sei $\phi(t) = e^{-t^2/2}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\phi'(t) = -t\phi(t)$. Wir wenden die Fouriertransformation auf diese Gleichung an und erhalten (nach 4.3(d) und 4.3(e)):

$$i\omega \mathscr{F}\phi(\omega) = \mathscr{F}\{\phi'\}(\omega) = \mathscr{F}\{-t\phi(t)\}(\omega) = -i(\mathscr{F}\phi)'(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

also $(\mathscr{F}\phi)'(\omega) = -\omega(\mathscr{F}\phi)(\omega)$. Also löst $\mathscr{F}\phi$ dieselbe Differentialgleichung wie ϕ und es folgt

$$\mathscr{F}\phi(\omega) = \mathscr{F}\phi(0) \cdot e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

da $\mathscr{F}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

4.4. Riemann-Lebesgue-Lemma: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann ist die Funktion $\mathscr{F} f$ (gleichmäßig) stetig und es gilt $\mathscr{F} f(\omega) \to 0$, $|\omega| \to \infty$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $\delta > 0$ mit $|e^{-ix} - 1| \le \varepsilon$ für $|x| \le \delta$. Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und $h \ne 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathscr{F} f(\omega + h) - \mathscr{F} f(\omega)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}) f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1||f(t)|\, dt \\ &\le \varepsilon \underbrace{\int_{|t| \le \delta/|h|} |f(t)|\, dt}_{\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt} + 2 \underbrace{\int_{|t| > \delta/|h|} |f(t)|\, dt}_{\to 0,\ h \to 0}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{F} f$ (gleichmäßig) stetig.

Ist f gegeben durch $f(t) = 1$, $t \in [a, b]$, und $f(t) = 0$ sonst, so gilt für $\omega \neq 0$:

$$\mathscr{F} f(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t}\, dt = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}$$

und somit $\mathscr{F} f(\omega) \to 0$ für $|\omega| \to \infty$. Dies gilt dann auch für alle Linearkombinationen solcher Funktionen. Den Fall allgemeiner absolut integrierbarer Funktionen erhält man durch ein Approximationsargument. □

4.5. Faltung und Fouriertransformation: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar und g sei beschränkt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $\tau \mapsto f(\tau)g(t - \tau)$ stückweise stetig und absolut integrierbar und die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

heißt Faltung von f und g, geschrieben $h =: f * g$. Die Funktion $f * g$ ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar und es gilt

$$\mathscr{F}(f * g)(\omega) = \mathscr{F} f(\omega) \cdot \mathscr{F} g(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Gilt zusätzlich $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $f * g(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Dies gibt den Zusammenhang zur Faltung aus 2.8.

Beweis. (nicht für Stetigkeit) Gilt $|g(t)| \leq M$, $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t-\tau)|\, d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau,$$

und h ist beschränkt. Weiter gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t-\tau)|\, d\tau\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|\, dt\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty,\end{aligned}$$

und h ist absolut integrierbar. Der Beweis für die Faltungsregel der Fouriertransformation verwendet ähnliche Argumente:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau)\, dt\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)\, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\, dt.
\end{aligned}$$

□

Beispiel: Sei $f(t) := \begin{cases} 1 & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$. Dann gilt

$$h(t) := f{*}f(t) = \int_{-1}^{1} f(t-\tau)\, d\tau = \text{Länge des Intervalls } [-1,1] \cap [t-1, t+1] = \begin{cases} 2-|t| & , |t| \leq 2 \\ 0 & , |t| > 2 \end{cases}.$$

Außerdem ist (vgl. Beweisskizze in 4.4):

$$\mathscr{F}f(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin\omega}{\omega} & , \omega \neq 0 \\ 2 & , \omega = 0 \end{cases}.$$

Nach dem Satz ist somit $\mathscr{F}g(\omega) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2\omega}{\omega^2} & , \omega \neq 0 \\ 4 & , \omega = 0 \end{cases}$.

4.6. Dancing-Hat-Lemma: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}f)(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)(\mathscr{F}g)(\eta)\, d\eta.$$

Der Name kommt daher, dass man statt $\mathscr{F}f$ auch $\hat{f}$ (engl: "hat f") schreibt.

Beweis. Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} f(\eta)\, d\eta\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} g(\xi)\, d\xi\, f(\eta)\, d\eta.$$

□

4.7. Skizze des Beweises der Fourierinversionsformel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass $\mathscr{F} f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \mathscr{F} f(\omega)\, d\omega.$$

Beweis. (Skizze) Es reicht, die Formel für $t = 0$ zu zeigen (verwende die Verschiebungsregel 4.3(b)). Wir setzen $h(t) = e^{-t^2/2}$ und $g(t) = h(at)$, wobei $a > 0$. Dann gilt nach 4.3(a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f)(\omega) h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\mathscr{F} g)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{a} (\mathscr{F} h)(t/a)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \mathscr{F} h(t)\, dt.$$

Lässt man hier a gegen Null gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen $2\pi f(0)$ und die linke Seite konvergiert gegen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} f(\omega)\, d\omega$, wovon wir uns jetzt überzeugen.

Linke Seite: Es gilt

$$|\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f)(\omega) h(a\omega)\, d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(\omega) d\omega| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} f(\omega)| |h(a\omega) - 1|\, d\omega.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ so, dass $|h(x) - 1| \le \varepsilon$ für $|x| \le \delta$. Für alle (anderen) $x \in \mathbb{R}$ hingegen gilt $|h(x) - 1| \le 2$. Wir können dann weiter abschätzen (ähnlich wie im Beweis von 4.4):

$$= \int_{|\omega| \le \delta/a} \ldots + \int_{|\omega| \ge \delta/a} \ldots \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F} f)(\omega)|\, d\omega + 2 \underbrace{\int_{|\omega| > \delta/a} |(\mathscr{F} f)(\omega)|\, d\omega}_{\longrightarrow 0,\ (h \to 0)}.$$

Rechte Seite: Zunächst gilt nach 4.3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}\, dt = 2\pi.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \le \varepsilon$ für $|x| \le \delta$. Da f beschränkt ist, gibt es andererseits $M > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \le M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben nun

$$|\int_{-\infty}^{\infty} f(at)(\mathscr{F} h)(t)\, dt - 2\pi f(0)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(at) - f(0)| |(\mathscr{F} h)(t)|\, dt = \int_{|t| \le \delta/a} \ldots + \int_{|t| \ge \delta/a} \ldots$$

und können wie oben verfahren. $\square$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man in 4.7 Stetigkeit und Beschränktheit von f nicht fordern muss. Diese Eigenschaften erhält man aus der Voraussetzung, dass $\mathscr{F} f$ absolut integrierbar ist.

Beispiele: (1) Sei $f(t) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2 t}{t^2} & , t \neq 0 \\ 4 & , t = 0 \end{cases}$. Dann gilt $\mathscr{F}\{f\}(\omega) = \begin{cases} 2\pi(2-|\omega|) & , |\omega| \leq 2 \\ 0 & , |\omega| > 2 \end{cases}$ (wende 4.7 auf das Beispiel in 4.5 an.

(2) Es gilt $\mathscr{F}\{\frac{2}{1+t^2}\}(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$. (Wende 4.7 auf das Beispiel in 4.1 mit $a = 1$ an).

4.8. Satz von Plancherel: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} f(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Beweis. (Idee) Ist zusätzlich $\mathscr{F} f$ absolut integrierbar, so verwende man 4.6 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} f(\omega)\overline{\mathscr{F} f(\omega)} \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathscr{F}\{\overline{\mathscr{F} f(\omega)}\}(t) \, dt.$$

Dann beachte man

$$\overline{\mathscr{F} f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\overline{f(t)} \, dt = (\mathscr{F}\overline{f})(-\omega)$$

und (unter Verwendung von 4.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}(\mathscr{F}\overline{f})(-\omega) \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}(\mathscr{F}\overline{f})(\omega) \, d\omega = 2\pi\overline{f(t)}.$$

Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument. $\square$