1.) Integral / Ableitung von kompexwertigen Funktionen

Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ heißt integrierbar (bzw differentierbar (in $t_0\in[a,b]$)) falls $u(t)=\operatorname{Re}(f(t))$, $v(t)=\operatorname{Im}(f(t))$ integrierbar (bzw differentierbar (in $t_0\in[a,b]$)) sind. In diesem Falle setzen wir.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \quad \text{(Integral von } f\text{)}$$

$f' = u' + iv'$ (Abbleitung von f)

$f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$. Ableitung von f in t_0.

Das Integral ist $\mathbb{C}$ linear ($\int_a^b (\alpha f+\beta g)dt = \alpha\int_a^b f dt + \beta\int_a^t g\, dt$ $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{C}$) und so ist die Ableitung. Die Produkt-, Quotienten und Kettenregel gelten auch. Dazu $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Substitution und die Partielle Integration gelten auch.

Beispiele: (1) $e^{(1+2i)t} = e^t e^{2it} = e^t\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)$

$$\Rightarrow \left(e^{(1+2i)t}\right)' = (e^t)'(\cos 2t + i\sin 2t) + e^t(\cos 2t + i\sin 2t)'$$

$$= e^t(\cos(2t)+i\sin(2t)) + e^t(-2\sin 2t + i\,2\cos 2t)$$

$$= e^t(\cos 2t + i\sin 2t) + 2ie^t(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$= (1+2i)e^t(\cos 2t + i\sin 2t) = (1+2i)e^{(1+2i)t}.$$

Allgemein $\quad (e^{wt})' = we^{wt} \quad \forall w \in \mathbb{C}. \quad (1)$

(2) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann, wenn $k \neq 0$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt \overset{(1)}{=} \frac{e^{ikt}}{ik}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik}$$

$$= e^{-ik\pi}\frac{\left(\overbrace{e^{2k\pi i}}^{\overset{1}{\shortparallel}}-1\right)}{ik} = 0.$$

wenn $k=0$ gilt $\quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi.$

Also $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ 2\pi, & \text{wenn } k = 0. \end{cases} \quad (*)$$

1.2 Periodische Funktionen: Sei $T>0$. Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt T-periodisch, wenn $f(x+T)=f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt.

Bsp. e^{ikt}, $\cos(kt)$, $\sin(kt)$, $k\in\mathbb{Z}$ sind alle 2π-periodisch. (z.B $\sin(2(t+2\pi))=$
$=\sin(2t+4\pi)=\sin 2t$).

$\cos(\sqrt{2}\pi t)$ ist $\sqrt{2}$ periodisch, da
$\cos(\sqrt{2}\pi(t+\sqrt{2}))=\cos(\sqrt{2}\pi t+2\pi)=\cos(\sqrt{2}\pi t)$.

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-periodisch, dann ist $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $g(t)=f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$ 2π-periodisch, da $g(t+2\pi)=f\left(\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{Tt}{2\pi}+T\right)$

$\underset{f\ T\ \text{periodisch}}{=}$ $f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)=g(t)$.

Wir können deshalb auf 2π-periodische Funktionen uns beschränken.
(es ist praktischer da e^{ikt}, $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ "schöne" Koeffizienten haben).

1,3 Eine 2π-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt <u>trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$</u>, falls $f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}$, es $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$ gibt mit. $f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}$.

Sei $l \in \mathbb{Z}$ mit $|l| \leq n$. Dann.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ilt} f(t)\,dt = \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ilt} e^{ikt}\,dt$$

$$= \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt \overset{(*)}{=} 2\pi c_l$$

$$\Rightarrow \boxed{c_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ilt} f(t)\,dt.} \quad (1)$$

Da für $k > 0$ $c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} =$

$$= c_k(\cos(kt) + i\sin(kt)) + c_{-k}(\cos(kt) - i\sin(kt)).$$

$$= \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{=: a_k} \cos(kt) + \underbrace{i(c_k - c_{-k})}_{=: b_k} \sin(kt).$$

bekommt man $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt)$,

wobei $a_k := c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-ikt} + e^{ikt}) f(t)\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\,dt} \quad (2)$$

und

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\,dt} \quad (3)$$

$\left(\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(0t)\,dt \right.$.

Wir schreiben also $\frac{a_0}{2}$ damit die Formel (2) auch für $k = 0$ gilt).

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Die Zahlen a_k ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$), c_k ($k \in \mathbb{Z}$) gegeben durch (1), (2), (3) heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> von f.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt).$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} := \lim_{n \to \infty} \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikt} \rightarrow \text{komplexe Fourierreihe}$$

heißen Fourierreihen von f