KAI Vorlesung 2. 6

Bemerkung: Die Fourierkoeffizienten erfüllen

$$\boxed{a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

am Montag gezeigt.

Daraus folgt

$$\boxed{c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

Diese Formeln gelten auf Grund der Gleichheiten

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}.$$

$$e^{\pm ikt} = \cos(kt) \pm i \sin(kt).$$

Erinnerung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ein Orthonormalsystem (das bedeutet $\|\vec{v}_i\| = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $(\vec{v}_i | \vec{v}_j) = 0 \ \forall i \neq j$).

Dann

$$\vec{v} \in \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \implies \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{v} | \vec{v}_j) \vec{v}_j.$$

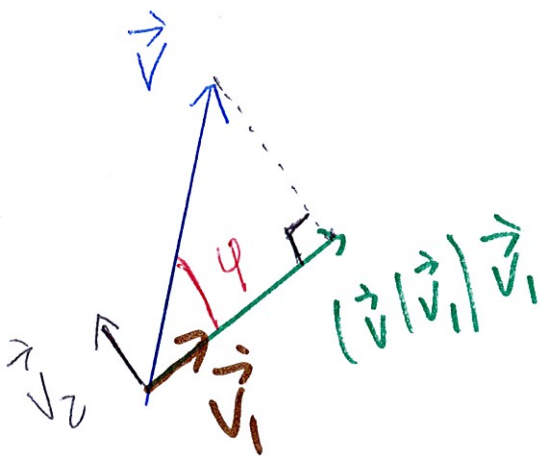
Beweis für $n=2$.

Sei $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$. (1)

Dann $(\vec{v}|\vec{v}_1) \overset{(1)}{=} a_1\underbrace{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}_{\substack{=1 \text{ weil} \\ \|\vec{v}_1\|=1}} + a_2\underbrace{(\vec{v}_2|\vec{v}_1)}_{\substack{=0 \text{ weil} \\ \vec{v}_1,\vec{v}_2 \text{ orth.}}}$

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = (\vec{v}|\vec{v}_1) \\ \text{ähnlich } &a_2 = (\vec{v}|\vec{v}_2) \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \vec{v} = (\vec{v}|\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}|\vec{v}_2)\vec{v}_2.$$

Geometrisch.



$(\vec{v}|\vec{v}_1)\vec{v}_1$ ist parallel mit $\vec{v}_1$. $\|\vec{v}_1\|=1$

und $(\vec{v}|\vec{v}_1)$

$= \|\vec{v}\|\,\|\vec{v}_1\|\cos\varphi = \|\vec{v}\|\cos\varphi$.

Also $\|(\vec{v}|\vec{v}_1)\vec{v}_1\| = \|\vec{v}\|\cos\varphi$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Die Erinnerung gilt auch für unendliche Orthonormalsysteme.

Auf $C([-\pi,\pi])$ (stetige Funktionen auf $[-\pi,\pi]$) betrachten wir das Skalarprodukt $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. (8)

(kontinuierliche Version von $\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$).

Sei f_k der Vektor (Funktion in diesem Fall) gegeben durch $f_k(t) = e^{ikt}$.

Dann $(f_k | f_\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(t)\overline{f_\ell(t)}\,dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } k=\ell \\ 0 & \text{wenn } k\neq \ell. \end{cases}$$

Also ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem. Deswegen, wenn $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f_k$

Dann $c_k = (f|f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$

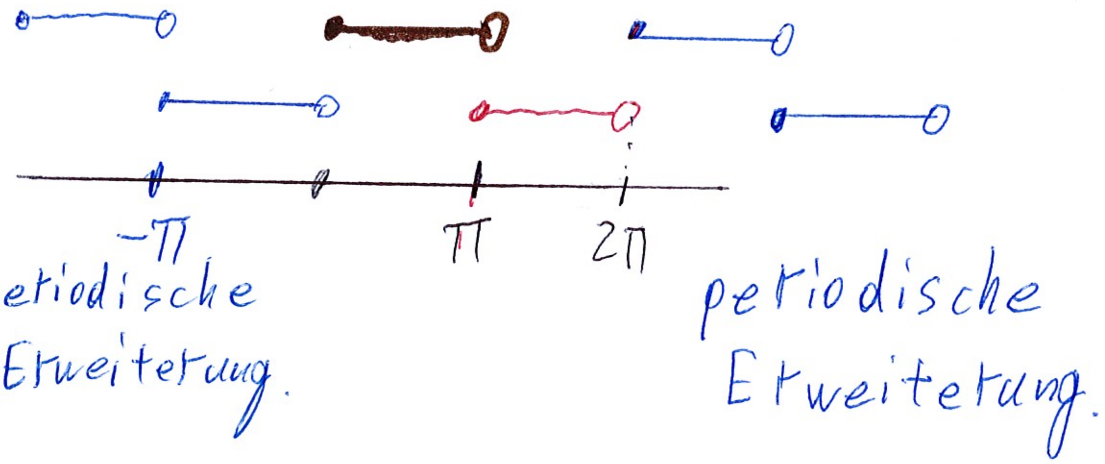
Beispiel (Klausur 2015).

Die 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{für } t\in[0,\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{für } t\in[\pi,2\pi). \end{cases}$$

Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion f.

Graph von f.



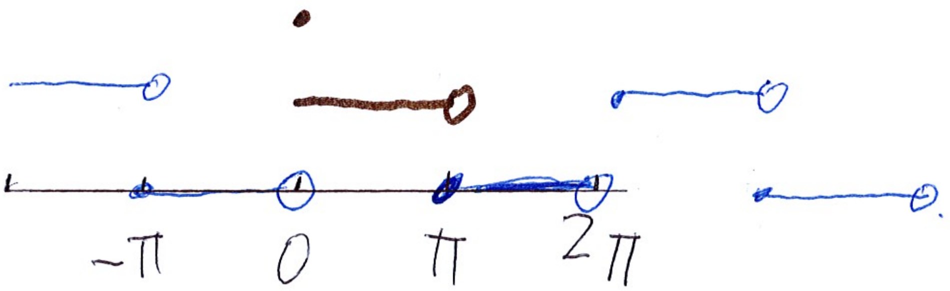
Lösung: Es gilt $f=f_1+f_2$, wobei $f_1(t)=\frac{1}{2}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ und f_2 ist die 2π-periodische Funktion mit

$$f_2(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } t\in[0,\pi) \\ 0 & \text{für } t\in[\pi,2\pi]. \end{cases}$$

Bemerkung: Sind c_k^1 [bzw c_k^2] die Fourierkoeffizienten von f_1 [bzw f_2] dann $c_k = c_k^1 + c_k^2$.

c_k^1. $\quad f_1(t) = \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{i0t}}_{\text{Fourierreihe von } f_1}$

Also $\quad c_k^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$



$$c_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) e^{-ikt} dt. = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f_2(t) e^{-ikt} dt.$$

Da $f_2(t) = 0$ auf $[-\pi, 0]$

Da $f_2(t) = \frac{1}{2}$ auf $[0,\pi]$

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^{-ikt} dt. = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi}.$$

$$= \frac{1}{-4\pi i k}\left(\underbrace{e^{-ik\pi}}_{(-1)^k} - \underbrace{e^{-i0\pi}}_{1}\right) = -\frac{1}{4\pi i k}\left((-1)^k - 1\right).$$

$$\Rightarrow c_k^2 = -\frac{1}{4\pi i k}\left((-1)^k - 1\right).$$

wenn $k \neq 0$.

$$c_0^2 = \underbrace{\ldots}_{\text{ähnlich wie früher}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} e^{-i0t}\,dt = \frac{1}{4}$$

Also
$$c_k^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{wenn } k=0. \\ 0, & \text{wenn } k\neq 0 \text{ } k \text{ gerade.} \\ \frac{1}{2\pi i k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir wissen auch, dass
$$c_k^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=0 \\ 0 & k\neq 0. \end{cases}$$

Also
$$c_k = c_k^1 + c_k^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, & \text{wenn } k=0. \\ 0, & \text{wenn } k\neq 0 \text{ } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2\pi i k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Definition: Eine 2π-periodische Funktion heißt stückweise stetig [bzw. stückweise glatt], wenn es $-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \pi$, so dass für $j = 0, \dots, n-1$ gilt.

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig [bzw stetig differentierbar]

(ii) $f(t_j+) := \lim_{t \to t_j+} f(t)$, $f(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f(t)$ [bzw. dazu $f'(t_j+)$, $f'(t_j-)$] existieren.