Bsp Sei $f(t) := e^{t} \cos t$, mit $\operatorname{Re} s > 2$ (*)

Dann $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{t} \cos t \, e^{-st} \, dt$.

$$= \int_0^\infty e^{(2-s)t} \cos t \, dt = \int_0^\infty e^{-wt} \cos t \, dt$$

(wobei $w = s - 2$)

Also wegen (*) $\operatorname{Re} w > 0$

$$= \mathcal{L}\{\cos t\}(w) = \frac{w}{w^2 + 1} \overset{w = s-2}{=\!=} \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}.$$

Exponentieller Ordnung γ alternative Definition. kann umgeschrieben werden als $\frac{f(t)}{e^{\gamma t}}$, $t \geq 0$ ist beschränkt.

Bsp $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t e^{2t}}{e^{3t}} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{e^t} \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=} 0$.

und da $\frac{t e^{2t}}{e^{3t}}$ ist auch stetig ist sie beschränkt, also ist $f(t) := t e^{2t}$ von exponentieller Ordnung 3. Grobe Interpretation: f steigt nicht schneller als $e^{\gamma t}$

Beweis von $(*)$.

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| \le \int_0^\infty |e^{-st}|\,|f(t)|\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} s\, t} M e^{\gamma t} \quad \left(\text{Da } |e^{-st}| = e^{-\operatorname{Re} s\, t},\ |f(t)| \le M e^{\gamma t} \right)$$

$$\le M \int_0^\infty e^{(-\operatorname{Re} s + \gamma)t}\, dt \ \underset{\text{letztes Mal berechnet.}}{\overset{\operatorname{Re} s > \gamma}{=}} \ \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma}.$$

Theorem: (D) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $f: [0,\infty) \to \mathbb{C}$, n mal stetig differentierbar mit $f, f', \dots, f^{(n)}$: $[0,\infty)$ alle von exponentieller Ordnung γ, dann

$$(*) \quad \boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).}$$

"Beweis" durch Induktion $n = 1$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \int_0^\infty f'(t) e^{-st}\, dt \ \underset{\text{Integration}}{\overset{\text{Partielle}}{=}}$$

$$\lim_{b\to\infty} f(t)e^{-st}\Big|_0^b - \int_0^\infty f(t)\left(e^{-st}\right)'dt.$$ (23).

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} f(b)e^{-sb}}_{=0 \text{ da}} \underbrace{-f(0)e^{-s\cdot 0}}_{-f(0).} \underbrace{-s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.}$$

$|f(b)| \leq Me^{\gamma b} \Rightarrow$

$|f(b)e^{-sb}| \leq Me^{(\gamma - \mathrm{Re}\, s)b} \to 0$ Da $\gamma < \mathrm{Re}\, s$

$\mathcal{L}\{f'\}(s)$

$= s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$

Also stimmt die Aussage wenn $n=1$

IV: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gilt (*). Zu zeigen.

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\}(s) = s^{n+1}\mathcal{L}\{f\}(s) - s^n f(0)$$
$$- \dots - s f^{(n+1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

$$\underbrace{\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\}(s) = s\mathcal{L}\{f^{(n)}(s)\} - f^{(n)}(0).}$$

(Da für $n=1$ $\mathcal{L}\{g'\}(s) = s\mathcal{L}\{g\}(s) - g(0)$
(wobei $g = f^{(n)}$).

$$\overset{(*)}{=} s\left(s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\right)$$
$$- f^{(n)}(0)$$
$$= s^{n+1}\mathcal{L}\{f\}(s) - s^n f(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$$

was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bsp (Klausur 2015) Mittels der Laplacetransformation bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

$$y''(t) + 2y(t) = \cos t, \quad t > 0, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \qquad (*)$$

(Mögliche Interpretation des Anfangswertproblems: $y(t)$ ist Abstand von der Ruhelage einer Feder. Anfangsabstand $y(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $y'(0)$ sind gegeben, und wir suchen $y(t)$ für alle $t \geq 0$.

Erinnerung $\boxed{\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}}$ $(**)$

Lösung wir verwenden Laplacetransformation zu bekommen

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Aus $(*)$ bekommen wir:

$$s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - s \underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0} + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

wegen (*) ←

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s)\,(s^2+2) = \frac{s}{s^2+1} + s.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s)\,(s^2+2) = \frac{s^3+2s}{s^2+1}$$

Wenn Re s > 0

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s)\,\cancel{(s^2+2)} = \frac{s}{s^2+1}\cancel{(s^2+2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = \cos t \;!!!}$$

, wegen (**).

Ist $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung γ dann gilt.

(Dämpfungsregel!) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$.

für $\operatorname{Re} s > \gamma + \operatorname{Re} a$.

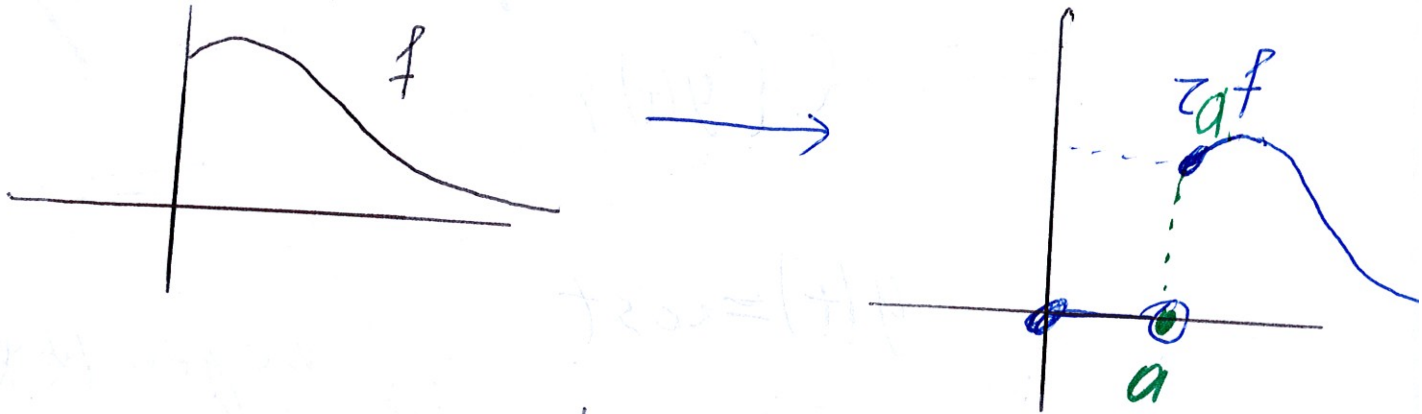
Beweis: Ist ähnlich wie die Berechnung der Laplacetransformation von $e^{2t}\cos t$.

Verschiebungsregel: Ist $a>0$, dann definieren wir $\tau_a f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$.

$$\tau_a f(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t \in [0,a). \end{cases}$$

Dann

$$\mathcal{L}\{\tau_a f\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s).$$



Lineare Differentialgleichung 1esten Ordnung.

Sei $a \in \mathbb{C}$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig, $y_0 \in \mathbb{C}$.

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = a y(t) + f(t), & t \geq 0. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Lösungsmethode $\quad y'(t) = ay(t) + f(t), \ t \ge 0.$

$$\Rightarrow \quad y'(t) - ay(t) = f(t) \Rightarrow$$

$$e^{-at}y'(t) - \underbrace{ae^{-at}}_{(e^{-at})'}y(t) = e^{-at}f(t) \Rightarrow$$

$$\underbrace{e^{-at}y'(t) + (e^{-at})'y(t)}_{\text{produktregel}} = e^{-at}f(t) \Rightarrow$$

$$\left(e^{-at}y(t)\right)' = e^{-at}f(t) \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^t \left(e^{-a\tau}y(\tau)\right)'d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad e^{-at}y(t) - e^{-a\cdot 0}y(0) = \int_0^t e^{-a\tau}f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad e^{-at}y(t) = y_0 + \int_0^t e^{-a\tau}f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{+at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Seien $f, g : [0,\infty)$ stückweise stetig und von exponentielle~~beschränkt~~ ordnung. Dann heißt $h : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)dt$. Faltung von f, g (man schreibt $h = f * g$). Sie ist stetig und von exponentielle~~beschränkt~~

Hauptdefinitionen/Sätze (ohne Details über die Bedingungen)

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$

<u>Laplacetransformation</u> von f an der Stelle s

f heißt von <u>exponentieller Ordnung</u> γ, wenn es ein $M \geq 0$ gibt, mit

$$\boxed{|f(t)| \leq M e^{\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.} \quad (*)$$

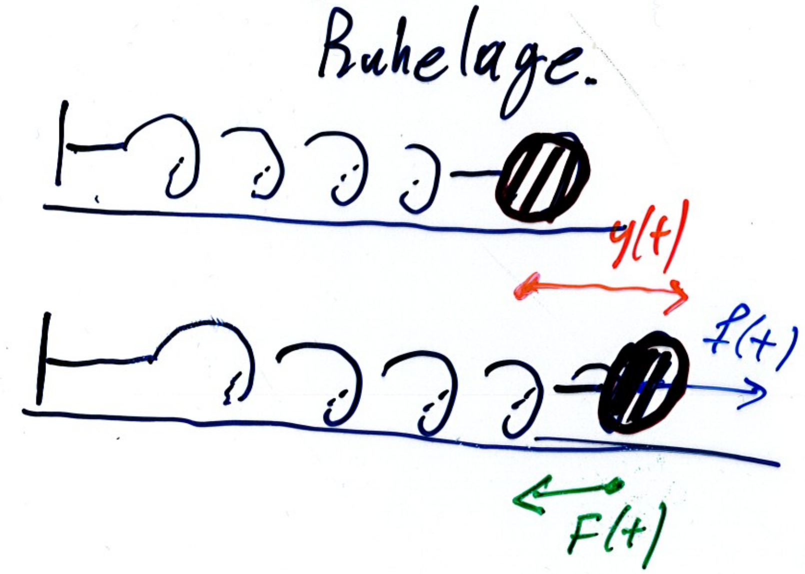
In diesem Fall existiert $\mathcal{L}\{f\}(s)$ wenn $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \gamma$ und dann

$$\boxed{|\mathcal{L}\{f\}(s)| = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma}} \quad (*)$$

alle Notizen jetzt online

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\end{array}}$$

Mögliche Interpetation des Anfangswertproblems (Gibt es sehr viele).



$y(t)$: Abstand von der Ruhelage an der Zeit t.

$F(t) = -k\, y(t)$. (1)

$F(t)$: Kraft der Feder; k: Hooksche Konstante.

$f(t)$: externe Kraft.

2es Newtonsches Gesetz: $m\, b(t) = F(t) + f(t)$. (2)

m: Masse des Körpers; $b(t)$: Beschleunigung an der Zeit t.

Aber $b(t) = y''(t)$ (3)

$(1),(2),(3) \Rightarrow m\, y''(t) = -k\, y(t) + f(t). \Rightarrow$

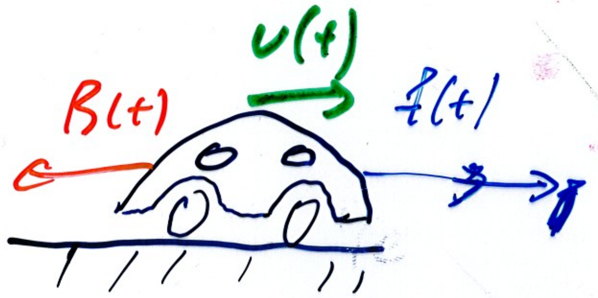
$$y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = \frac{f(t)}{m}.$$

Ist $\frac{k}{m} = 2$, $\frac{f(t)}{m} = \text{cost}$,

$\xrightarrow{\text{dann}} y''(t) + 2y(t) = \text{cost}.$

Anfangsabstand $y(0) = 1$ und Anfangsgeschwindigkeit $y'(0)$ sind gegeben. Wir suche $y(t)$ $\forall t \geq 0$.

Mögliche Interpretation des Anfangswertproblems (gibt es sehr viele).



Ein Auto bewegt sich mit Kraft $f(t)$ durch die Benzine. Die Reibung ist von der Form $R(t) = -a\,v(t)$, $(a \geq 0)$ wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Autos ist. Aus dem 2ten Newtonschen Gesetz bekommen wir.

$$m\,v'(t) = -a\,v(t) + f(t)$$

Gegeben ist die Anfangsgeschwindigkeit und $f(t)$ und wir suchen $v(t)$ für alle $t \geq 0$.