<u>Beispiel</u>: Lösen Sie das Anfangswert-problem

$$\begin{cases} y'(t) + 5y(t) = t, & t \geq 0. \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Lösung: Aus der Methode der letzten Vorlesung bekommen wir

$$y(t) = 3e^{-5t} + \int_0^t e^{-5(t-\tau)} \tau \, d\tau.$$

$$= 3e^{-5t} + e^{-5t} \underbrace{\int_0^t e^{5\tau} \tau \, d\tau}_{I}. \quad (1)$$

$$I \underset{\text{Integration}}{\overset{\text{Partielle}}{=\!=\!=}} \frac{1}{5}\int_0^t (e^{5\tau})' \tau \, d\tau = \frac{e^{5\tau}\tau}{5}\Bigg|_0^t - \frac{1}{5}\int_0^t e^{5\tau}(\tau)' d\tau.$$

$$= \left(\frac{te^{5t}}{5} - 0\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{e^{5\tau}}{5}\right)\Bigg|_0^t = \frac{te^{5t}}{5} - \frac{e^{5t}}{25} + \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(5t-1)e^{5t} + 1}{25}. \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \quad y(t) = 3e^{-5t} + e^{-5t}\,\frac{(5t-1)e^{5t}+1}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \frac{5t-1}{25} + \frac{76}{25}e^{-5t}.$$

2.7 [Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ stückweise stetig, und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Stellen, wo f unstetig ist zusammen mit $t_0=0$.
Dann ist die Funktion y definiert durch

$$y(t)=e^{at}y_0+\int_0^t e^{a(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau,\quad t\geq 0 \qquad (1)$$

stetig auf $[0,\infty)$ und stetig differentierbar in $[0,\infty)\setminus\{t_j : j\in\mathbb{N}_0\}$ mit

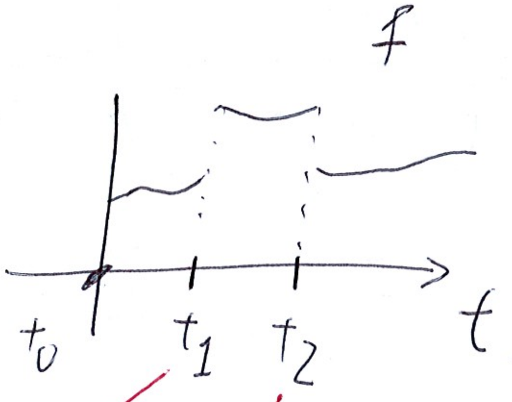
$$y'(t)=ay(t)+f(t),\quad t\in[0,\infty)\setminus\{t_j : j\in\mathbb{N}_0\}$$

$$y'(t_j\pm)=ay(t_j)+f(t_j\pm),\quad j\in\mathbb{N}_0.$$

Auch In diesem Fall wird y als Lösung von

$$\begin{cases} y'(t)=ay(t)+f(t), & t\geq 0\\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

betrachtet.]



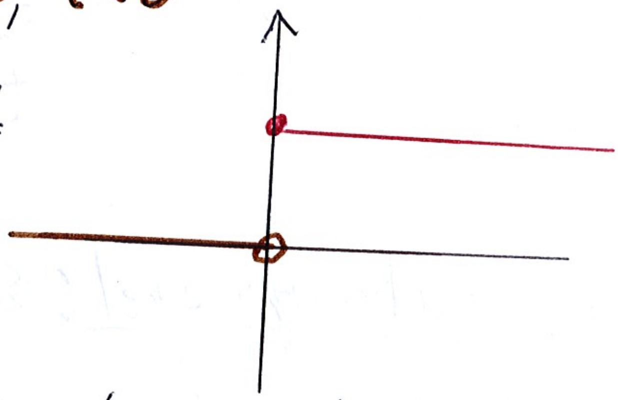
An diesen stellen ist y definiert durch (1) nicht differentierbar

[2.8 Faltung: Seien $f, g: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ exponentiell beschränkt und stückweise stetig. Dann ist die Funktion

$$h: [0,\infty) \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad h(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Stetig und exponentiell beschränkt und heißt Faltung von f, g. Man schreibt $h = f * g$.].

Bsp Sei $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ der Einheitssprung oder Heavisidefunktion.



Dann $$(\sigma * \sigma)(t) = \int_0^t \underbrace{\sigma(\tau)\, \sigma(t-\tau)}_{=1 \text{ da } \tau,\, t-\tau \geq 0 \text{ in } [0,t]} d\tau$$

$$= \int_0^t 1\, d\tau = t, \quad t \geq 0.$$

Bemerkungen: (a) Es gilt.

$$f*g(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \underset{\text{Substitution}}{\overset{u=t-\tau}{=}} \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du = g*f(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f*g = g*f}.$$

(b) $(\alpha f_1 + f_2)*g = \alpha f_1 * g + f_2 * g, \quad f*(\beta g_1 + g_2) = \beta f * g_1 + f * g_2$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$(f*g_1)*g_2 = f*(g_1*g_2)$$

(c) $$(\sigma * f)(t) = \int_0^t \underbrace{\sigma(t-\tau)}_{\substack{=1 \text{ da} \\ t-\tau \geq 0}} f(\tau)\,d\tau = \underbrace{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}_{\substack{\text{Stammfunktion von } f \\ \text{die in } 0 \text{ verschwindet}}}$$

2.9 Die Faltungsregel: Seien $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann

$$\mathcal{L}\{\underbrace{f*g}_{\text{Faltung}}\}(s) = \underbrace{\mathcal{L}\{f\}(s)\,\mathcal{L}\{g\}(s)}_{\text{Produkt}}, \quad \text{für } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

"Beweis": $\mathcal{L}\{f*g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]dt$

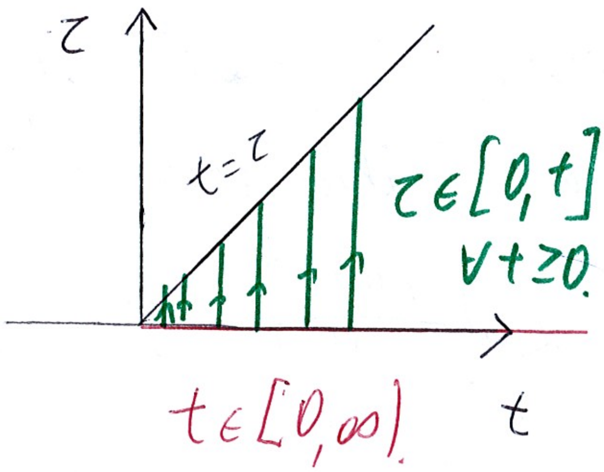
$\boxed{\text{Da } e^{-st} = e^{-s\tau}\, e^{-s(t-\tau)}}$

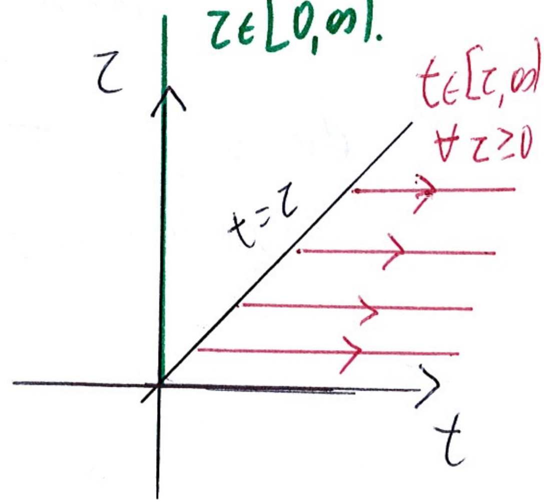
(*) $$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \underbrace{\left[\int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\,dt\right]}_{\text{Mit der Substitution } u = t-\tau \text{ wird das } \int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du = \mathcal{L}\{g\}(s)} d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, \mathcal{L}\{g\}(s)\, d\tau$$

$$= \mathcal{L}\{g\}(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau = \mathcal{L}\{g\}(s)\, \mathcal{L}\{f\}(s)$$

(*) Um die Gleichheit zu zeigen haben wir die Integrationsordnung vertauscht (siehe Skizze). Das wird ausführlicher in Juni diskutiert werden.





33

Bsp. $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Dann, wenn $\operatorname{Re} s \geq 0$

gilt $\mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\sigma(t)}_{\substack{=1 \\ \text{da } t \geq 0}} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \to \infty} \frac{-(e^{-sb} - e^{-s0})}{s} = \frac{1}{s}.$$

Also $\mathcal{L}\{\sigma * \sigma\}(s) = \mathcal{L}\{\sigma\}(s)\, \mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s^2}$

Ähnlich $\mathcal{L}\{\underbrace{\sigma * \ldots * \sigma}_{n-\text{mal}}\} = \frac{1}{s^n}$ (1).

Andererseits kann man mit Induktion zeigen, dass $\underbrace{\sigma * \ldots * \sigma}_{n-\text{mal}} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. (2)

Für den Induktionschritt benutzt man, dass $(\sigma * f)(t) = \int_0^t f(z)dz \Rightarrow \sigma * f$ ist die Stammfunktion von f, die in 0 verschwindet.

Aus (1), (2) folgt $\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{s^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ wenn } \operatorname{Re} s > 0}$$

Faltung in Differentialgleichungen.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) - a y(t) = f(t), & t \geq 0. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{C}$

$f: [0,\infty] \to \mathbb{C}$ stetig

hat die Lösung (letzte Vorlesung).

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

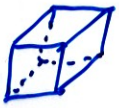
$$= y_0 g(t) + \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\, d\tau}_{\text{Das ist aber } (f*g)(t).},$$

wobei $g(t) = e^{at}$

Erinnerung

$$f*g(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Faltung in der Wahrscheinlichkeits theorie: eine diskrete Fassung.



Würfel 1

Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5

Würfel 2

Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5.

p_j : Wahrscheinlichkeit die Zahl j zu bekommen.

z.B p_2 : Wahrscheinlichkeit die Zahl 2 zu bekomme ($\frac{1}{6}$ wenn der Würfel gut ist)

w_j : Wahrscheinlichkeit die Zahl j zu bekommen (mit dem blauen Würfel.

Frage: Wir werfen beide Würfel. Was ist die warscheinlichkeit das die Summe 4 ist?

Antwort: $p_0 w_4 + p_1 w_3 + p_2 w_2 + p_3 w_1 + p_4 w_0$

$$= \sum_{j=0}^{4} p_j w_{4-j} \rightarrow$$ diskrete Fassung der Faltung.

Faltung in der Physik: Eine Fassung in $\mathbb{R}^3$.

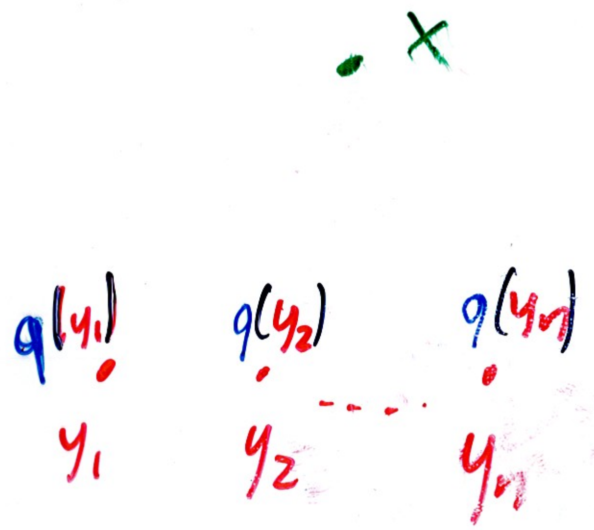
Ladung q an der Stelle $y \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ Erzeugtes Potential V an der Stelle x

$$V(x) = \frac{q}{|x-y|}. \quad \text{(Coulomb Potential)}.$$

Ladungen $q(y_1), q(y_2), \ldots, q(y_n)$ an den Stellen $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Erzeugtes Potential V an der Stelle x



$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q(y_j)}{|x-y_j|}$$

Landungsdichte $\rho(y)$ in $\mathbb{R}^3$

($\int_{\mathbb{R}^3}$ ist Integral über $\mathbb{R}^3$. wird später erklärt werden)

$$\Rightarrow \quad V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\,dy$$

$$= (\rho * g)(x) \qquad \left(g(x) = \frac{1}{|x|}\right).$$

$\rightarrow$ Faltung in $\mathbb{R}^3$!!!