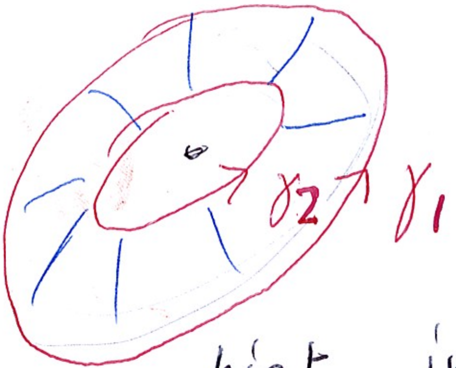
Variante des Cauchyschensatzes | Sind γ_1, γ_2 positiv orientiert mit γ_2 innerhalb von γ_1, F differenzierbar auf γ_1, γ_2 und <u>zwischen</u> γ_1, γ_2, dann $\int_{\gamma_1} F\,dz = \int_{\gamma_2} F\,dz$ (1)



<u>Bem</u>: F <u>muss nicht</u> innerhalb von γ_2 differenzierbar sein (innerhalb von γ bedeutet hier, in dem von γ begrenzten Bereich ohne γ)

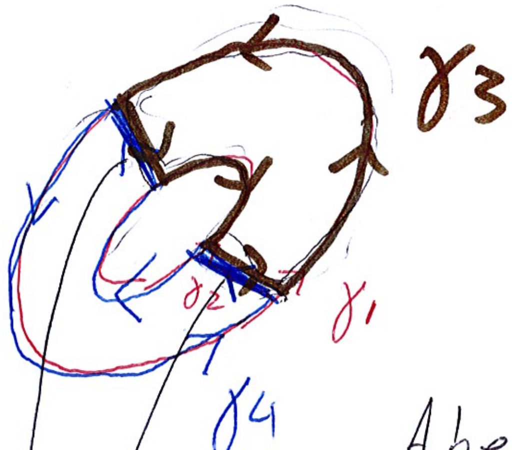
Beweisidee:

Da F differenzierbar innerhalb von γ_3

$$\int_{\gamma_3} F\,dz \overset{!}{=} 0 \quad (\text{Cauchy}) \quad (2)$$

ähnlich

$$\int_{\gamma_4} F\,dz = 0 \quad (\text{Cauchy}) \quad (3)$$



Aber $\int_{\gamma_3} F\,dz + \int_{\gamma_4} F\,dz$

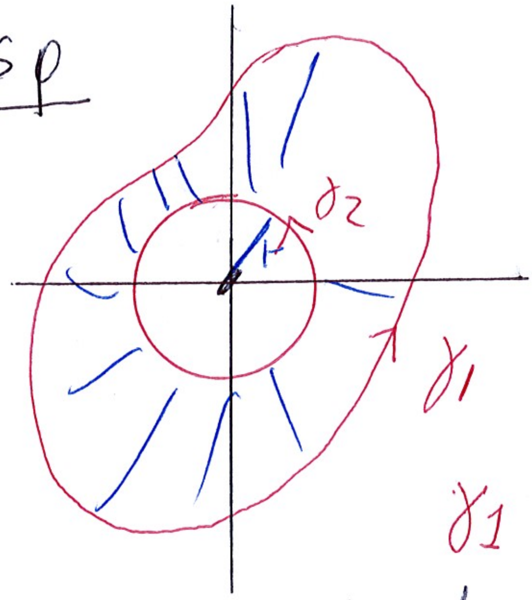
$$= \int_{\gamma_1} F\,dz - \int_{\gamma_2} F\,dz. \quad (4)$$

weil diese Teile sich aufheben

$(2), (3), (4) \Rightarrow (1)$

in (4) haben wir "$-$" wegen Änderung der Orientierung (siehe Skizze).

Bsp



$F(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dann

$$\int_{\gamma_1} F\,dz$$

γ_1 positiv orientiert und 0 ist innerhalb von γ_1.

Lösung: Sei γ_2 ein positiv orientierter Kreis, mit Zentrum 0, innerhalb von γ_1. Da F differenzierbar zwischen γ_1, γ_2 ist gilt.

$$\int_{\gamma_1} F\,dz = \int_{\gamma_2} F\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

gestern berechnet.

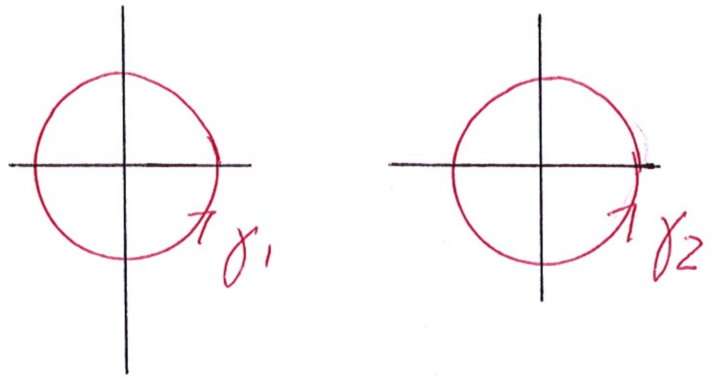
wobei $\gamma_2(t) = re^{it}$

Bemerkung: $\int_\gamma F\,dz$ ist invariant unter orientierungstreu Umparametrisierungen. von γ.

Bsp sei $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma_1(t) = e^{it}$

$\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma_2(t) = e^{2it}$.

Dann ist γ_2 orientierungstreu Umparametrisierung von γ_1. Dann



$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz.$$

3.9 Folgerungen der Cauchyschen Integralformel

[(a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft differenzierbar. Unter den Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel gilt.

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Beweisidee: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\,d\zeta$

$$\Rightarrow f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dz}\right)^k \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{d}{dz}\right)^k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

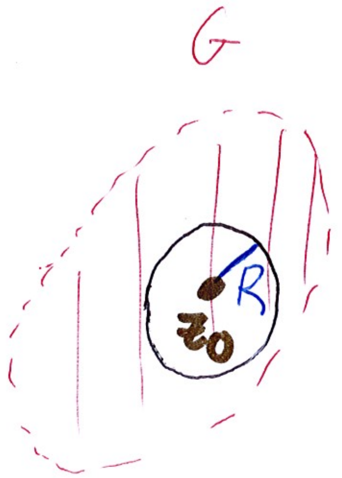
mit Induktion

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$$

folgt $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^k \cdot \left(\dfrac{1}{\zeta - z}\right) = \dfrac{k!}{(\zeta - z)^{k+1}}$

[(b) Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in Potenzreihen entwickeln. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k, \quad |z-z_0| < R$$



wenn $\{z : |z-z_0| < R\} \subset G$, (die Konvergenz ist absolut!)].

3.10 Laurententwicklung

Ist G offen $z_0 \in G$ und $F : G \setminus \{z_0\} \to G$ holomorph, dann heißt z_0 eine isolierte Singularität von F. Dann gibt es $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ $a_k \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt mit

$$F(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Laurentreihe}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Hauptteil der Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil der Reihe}}$$

wenn $0 < |z-z_0| < R$, wobei

$\{z : |z - z_0| < R\} \subset G.$

a_{-1} heißt Residuum von F in z_0

$$\mathrm{res}(F, z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität z_0 heißt

<u>hebbare Singularität</u>, wenn $a_k = 0 \quad \forall k < 0$.

<u>Pol n-ter Ordnung</u>, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0 \quad \forall k < -n$. und <u>wesentliche Singularität</u> sonst.

Bemerkung: Konvergenz bedeutet, Konvergenz des Hauptteils und Nebenteils.

<u>Bsp 1</u> $F : \mathbb{C} \setminus \{4\} \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{1}{z-4} + \frac{2}{(z-4)^3} = 1(z-4)^{-1} + 2(z-4)^{-3}$$

Dann $\mathrm{res}(F, 4) = a_{-1} = 1$, und 4 ist ein Pol 3-ter Ordnung. $(a_{-3} = 2$ und $a_k = 0 \quad \forall k < -3$.

Bsp 2 $\quad F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Also ist 0 eine hebbare Singularität.

$$\operatorname{res}(F, 0) = 0.$$

Bsp 3 $\quad F : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Da $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k \; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

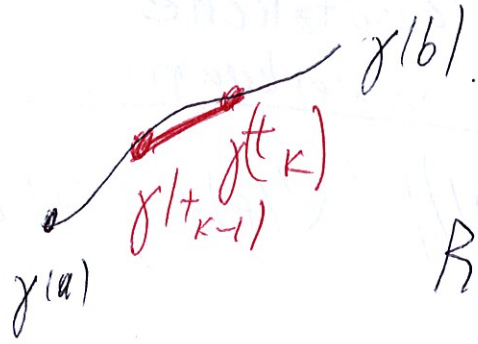
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z-1)^{-k}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Also ist 1 eine wesentliche Singularität von F $\left(a_{-k} = \frac{1}{k!} \neq 0 \; \forall k > 0 \right)$

Eine isolierte Singularität z_0 ist eine hebbare Singularität $\Longleftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} F(z)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

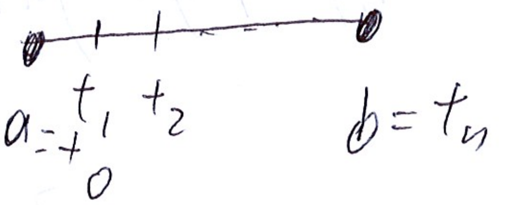
z.B. in Bsp 2 ist 0 hebbare Singularität da $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Zusätzliche Bemerkungen.



$\int_\gamma F(z)dz$ ist Limes von

Riemanschen Summen.



$$\sum_{K=1}^{n} F(\gamma(t_K))\,(\gamma(t_K)-\gamma(t_{K-1})).$$

Ist $F: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ differenzierbar, dann

$$H(z)=\int_{S[0,z]} F(s)\,ds$$

ist Stammfunktion von F.

Interpretation des Realteils und Imaginärteils des Kurvenintegrals, als Arbeit von Kräften.

$$\int_\gamma F dz = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Sei $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$.

$F(\gamma(t))= u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))$

(Zerlegung in Real- und Imaginär teil).

Dann $\int_a^b F(y(t))\, y'(t)\, dt.$ Zusätzliche Bemerkungen.

$$= \int_a^b \big(u(x(t),y(t)) + i\, v(x(t),y(t))\big)\big(x'(t) + i y'(t)\big)\, dt.$$

$$= \int_a^b \Big(u(x(t),y(t))\, x'(t) - v(x(t),y(t))\, y'(t)\Big)\, dt.$$

$$+ i \int_a^b \Big[u(x(t),y(t))\, y'(t) + v(x(t),y(t))\, x'(t)\Big]\, dt.$$

$$= \int_a^b \begin{pmatrix} u(x(t),y(t)) \\ -v(x(t),y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$+ i \int_a^b \begin{pmatrix} v(x(t),y(t)) \\ u(x(t),y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt.$$

Arbeit von F_1 entlang der Kurve. Skalarprodukt.

$$= \int_a^b F_1(x(t),y(t)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\text{Geschwindigkeit}} dt + i \int_a^b F_2(x(t),y(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt.$$

infinitesimale Zeitänderung.

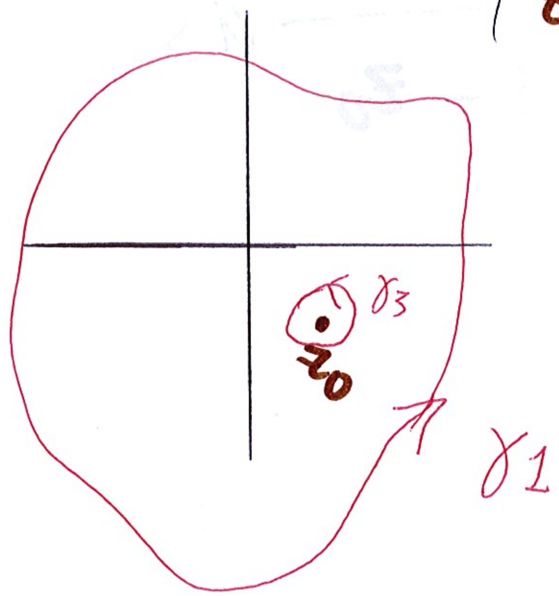
$F_1(x(t),y(t)) \cdot ds$

ds infinitesimale Änderung des Orts.

infinitesimale Arbeit von F_1. $= \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}.$

Idee der Herleitung der Cauchyschen Integralformel. $F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$

(z_0 innerhalb von γ_1)



Wir betrachten eine kleine Kurve γ_3 um z_0. Da $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$ differenzierbar ist zwischen γ_1 und γ_3, bekommen wir

$$\int_{\gamma_1}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta = \underbrace{\int_{\gamma_3} \underbrace{\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}}_{\to F'(z_0) \text{ wenn } \gamma_3 \text{ klein wird}}\, dz}_{\to 0 \text{ wenn } \gamma_3 \text{ klein wird}}$$

Also $$\int_{\gamma_1}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta = F(z_0)\underbrace{\int_{\gamma_1}\frac{1}{\zeta-z_0}\,d\zeta}_{= 2\pi i \text{ aus } \longrightarrow}$$

ähnlichen Gründen, wie im Beispiel der Seite 61. Daraus folgt

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$