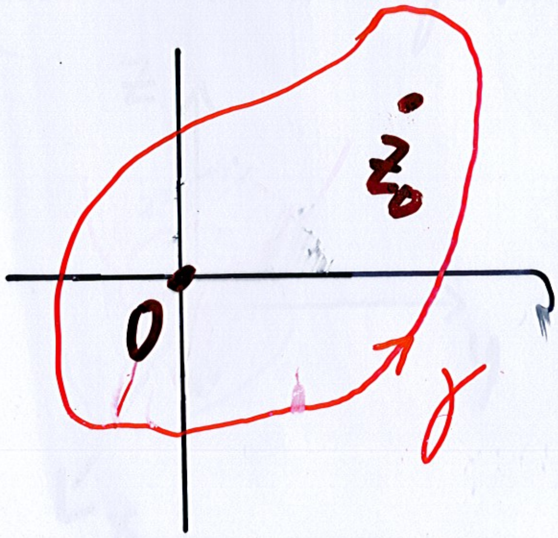
Erinnerung 1: Liegt 0 innerhalb der einfach geschlossenen, positiv orientierten Kurve γ, dann



$$\int_\gamma z^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Ähnlich folgt: liegt z_0 innerhalb von γ dann gilt

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Erinnerung 2: Ist $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

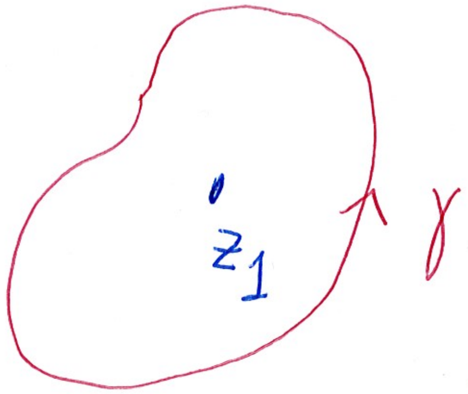
dann $\underbrace{\operatorname{res}(F, z_0)}_{\text{Residuum von } F \text{ in } z_0} := a_{-1}$

3.11 Residuensatz

[Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex und $\gamma : [a,b] \to G$ eine positiv orientierte Kurve. Seien $z_1, \dots, z_m$ in G verschieden und innerhalb von γ, und sei $F : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann gilt $\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(F, z_j)$]

Beweisidee: $\overbrace{\text{Induktion in } m}$ Sei $m = 1$. Dann ist



$F : G \setminus \{z_1\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

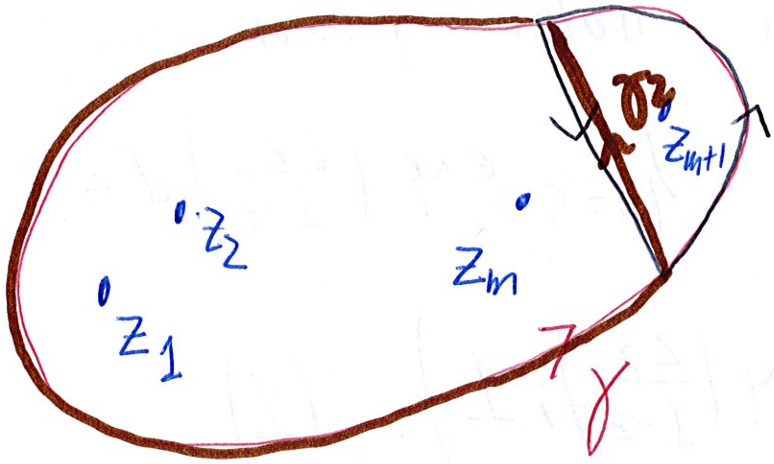
Sei $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_1)^k$ die Laurentreihe von F um z_1. Nach Definition ist $\operatorname{res}(F, z_1) = a_{-1}$

Dann $\int_\gamma F(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\int_\gamma (z - z_1)^k\,dz}$

(siehe Erinnerung 1 vorherige Seite $\longleftarrow$) $= \begin{cases} 2\pi i, & \text{wenn } k = -1 \\ 0, & \text{wenn } k \neq 1 \end{cases}$

Also $\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i \operatorname{res}(F, z_1)$.

Induktionsschritt: $m \longrightarrow m+1$.



$\gamma_1 \to z_{m+1}$ ist innerhalb von γ_1.

$\gamma_2 \to z_1, \dots, z_m$ sind innerhalb von γ_2

$$\int_\gamma F\,dz = \int_{\gamma_1} F\,dz + \int_{\gamma_2} F\,dz$$

Induktionsannahme

$$2i\pi\left(\sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(F, z_j) + \operatorname{res}(F, z_{m+1})\right)$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{m+1} \operatorname{res}(F, z_j).$$

Bsp. Berechnen Sie $\int_{|z|=5} \exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) dz$, wobei der Integrationsweg positiv orientiert ist.

Lösung: 1 ist innerhalb des Kreises $|z|=5$, und $\exp\left(\frac{2z}{1-z}\right)$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, als Komposition von holomorphen Funktionen. Deshalb ist $\int_{|z|=5} \exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) dz$

$$= 2\pi i \operatorname{res}\left(\exp\left(\frac{2z}{1-z}\right), 1\right). \quad (1)$$

Aber $\exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) = \exp\left(\frac{2(z-1)+2}{1-z}\right) = \exp\left(-2+\frac{2}{1-z}\right)$.

$$= e^{-2} \exp\left(\frac{2}{1-z}\right) = e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^n}{(1-z)^n}.$$

$$= e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}.$$ Also

ist $\operatorname{res}\left(\exp\left(\frac{2z}{1-z}\right)\right) = a_{-1} = e^{-2} \frac{(-1)^1 2^1}{1!} = -\frac{2}{e^2}$

Aus der letzten Gleichung und aus (1) folgt, dass $\int_{|z|=5} \exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) dz = -\frac{4\pi i}{e^2}$.

Manchmal um a_{-1} zu bestimmen muss man nicht die Funktion in Laurentreihe entwickeln. Es gibt schnelleret Wege:

3.12 (a) Berechung von Residuen.

Hat F in einen Pol von Ordnung n oder weniger ($n \in \mathbb{N}$) dann gilt:

(n-1)-e Ableitung an der Stelle $z = z_0$.

$$\operatorname{res}(F, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}}\left((z - z_0)^n F(z)\right)\Bigg|_{z=z_0} \qquad (*)$$

Für $z_0 = 0$.

<u>Beweisidee:</u> Sei $F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k$

Dann $z^n F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^{k+n}$

$$\xrightarrow[k=m-n]{m=k+n} \quad z^n F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-n} z^m$$

$$\Rightarrow \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^n F(z)\right) = \sum_{m=n-1}^{\infty} a_{m-n}\, m(m-1)\ldots(m-n+1) z^{m-n+1}$$

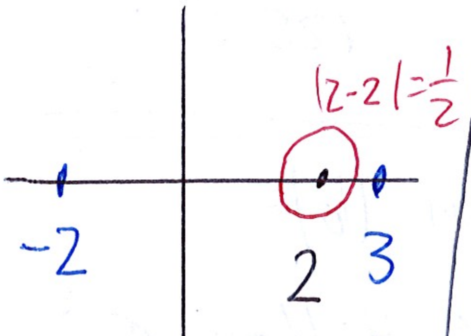
$$\Rightarrow \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z^n F(z) \right) \Big|_{z=0} = a_{-1} \, (n-1)!$$

und daraus folgt die Formel.

<u>Bsp</u> Sei $F(z) = \frac{z^3}{(z-3)^2 (z+2)^2}$. Berechnen Sie

(i) $\int_{|z-2| = \frac{1}{2}} F(z)\,dz$, (ii) $\int_{|z-3| = \frac{1}{2}} F(z)\,dz$,

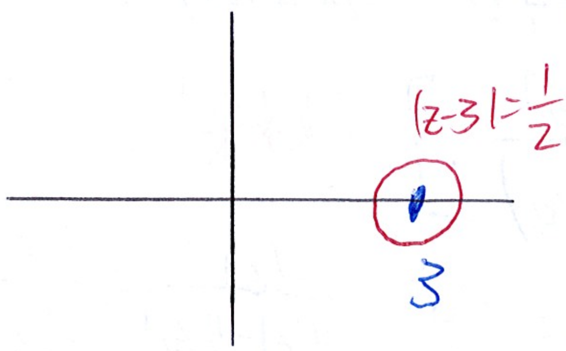
wobei die Kurven einfach geschlossen und positiv orientiert sind.



F ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$

F ist differenzierbar auf und innerhalb von $|z-2| = \frac{1}{2}$ deshalb ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{|z-2| = \frac{1}{2}} F(z)\,dz = 0.$$



Innerhalb von $|z-3| = \frac{1}{2}$ gibt es nur die Polstelle 3. Also

$$\int_{|z-3| = \frac{1}{2}} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F, 3) \quad (*)$$

$$\operatorname{res}(F,3) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dz}\,(z-3)^2 F(z)\Big|_{z=3} =$$

$$= \left(\frac{d}{dz}\,\frac{z^3}{(z+2)^3}\right)\Big|_{z=3} = \frac{3z^2(z+2)^3 - z^3\,3(z+2)^2}{(z+2)^6}\Big|_{z=3}$$

$$= \frac{3z^2(z+2)^2\,[z+2-z]}{(z+2)^6}\Big|_{z=3} = \frac{6z^2}{(z+2)^4}\Big|_{z=3} = \frac{54}{625} \quad (**)$$

$$(*),(**) \Longrightarrow \int_{|z-3|=\frac{1}{2}} F(z)\,dz = \frac{108}{625}\pi i.$$

[Berechnung von Residuen (b)

Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H: U \to \mathbb{C}$ holomorph (also ist U offen) $z_0 \in U$ und $G(z_0) \neq 0$, $H(z_0) = 0$, $H'(z_0) \neq 0$ dann

$$\operatorname{res}(F, z_0) = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}.\Big] \quad (***)$$

Beweisidee: $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)F(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{G(z)}{\frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0}} = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}.$

Deshalb gilt (***).

<u>Bsp</u>. Sei $F(z)=\frac{e^z}{\cos z}$, $\mathrm{Res}(F,\frac{\pi}{2})$.

$$e^{\frac{\pi}{2}} \neq 0, \quad \cos\frac{\pi}{2}=0 \quad \text{und} \quad (\cos z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0$$

und e^z, $\cos z$ sind holomorph in $\mathbb{C}$. Deshalb ist

$$\mathrm{res}\left(F,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^z}{(\cos z)'}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -e^{\frac{\pi}{2}}.$$

~~Ist~~ 3.16 Logarithmus.

Ist $z = \cancel{|z|} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dann $z=|z|e^{i}$.

$\varphi = \arg(z)$: Argument von z (nicht eindeutig da z.B. $\varphi+2\pi$).

Ist $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, und $\varphi \in (-\pi,\pi)$.

dann heißt φ <u>Hauptzweig des Arguments</u>