3.13. Logarithmus [Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann

$z = |z| e^{i\varphi}$, φ heißt <u>Argument</u> von z

($\arg z$). $\varphi + 2k\pi$ ist auch ein Argument

von z, wenn $k \in \mathbb{Z}$.

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann gibt es

$\theta \in (-\pi, \pi)$ eindeutig mit $z = |z| e^{i\theta}$.

θ heißt <u>Hauptzweig des Arguments</u> von z,

($\theta = \operatorname{Arg} z$). Wir definieren dann

(*) $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(Hauptzweig des Logarithmus)]

Bsp $z = 2i$. Dann $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Also

$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$, da $\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$. Also

$\operatorname{Log} 2i \overset{(*)}{=} \ln|2i| + i\frac{\pi}{2} = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$. (1)

$\boxed{\text{Bem}}$ 3.13.2: $\operatorname{Log}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < \pi\}$

ist holomorph und bijektiv mit

Umkehrabbildung exp. Es gilt

$$\mathrm{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

3.13.3. Allgemeine Potenz: Für $z \in \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man durch

$$z^{\alpha} := \exp(\alpha \, \mathrm{Log}\, z)$$

den Hauptzweig der n-ten Potenz.

Bsp $\quad (2i)^{i} = \exp(i \, \mathrm{Log}(2i)) \overset{(1)}{=}$

$$= \exp\left(i \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right).$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} e^{i \ln 2}.$$

3.13.4 Für $n \in \mathbb{N}$ enthält man den Hauptzweig der n-ten Wurzel

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \exp(i \, \mathrm{Arg}\, z / n).$$

Bsp

$$(2i)^{\frac{1}{3}} = |2i|^{\frac{1}{3}} \exp\left(i \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{3}\right) = 2^{\frac{1}{3}} \exp\left(i \frac{\pi}{6}\right).$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right).$$

Fouriertransformation

Erinnerung: Ist f 2π-periodisch und stetig dann

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1), \text{ wobei } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \quad (2)$$

Beitrag / Intensität der Schwingung e^{int}

Herleitung von (2) (nicht rigoros)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \overset{(1)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt} e^{-int}\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\, dt}_{= \begin{cases} 2\pi, & \text{wenn } m=n \\ 0, & \text{wenn } m \neq n \end{cases}} = 2\pi a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Informale Herleitung

Ähnlich ist f T-periodisch und stetig, dann

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\frac{n2\pi}{T}} \frac{2\pi}{T} e^{+i\frac{n2\pi}{T}t}}_{\text{"unendliche Riemansche Summe"}}.$$

wobei
$$b_{\frac{n2\pi}{T}} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{n2\pi}{T}t}\, dt.$$

Was passiert wenn f nicht periodisch ist? Wir betrachten den Limes $T \to \infty$. Dann alle Schwingungen $e^{i\omega t}$ haben Beitrag, die "Riemannsche Summe" wird Integral und wir bekommen, $b_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

und $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega t} dt$.

Diese Informale Herleitung führt zur folgenden Definition:

Def 4.1 ...... Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar (a.i.b), d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Die <u>Fouriertransformierte von f</u> definiert man für $\omega \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

[4.2 **Fourierinversionformel** Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (77)
wie in Def 4.1, Ist $\mathcal{F}f$ auch (a;b),
dann

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\omega}\,\mathcal{F}f(\omega)\,d\omega \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Interpretation: f ist kontinuierliche Summe von Schwingungen $e^{it\omega}$ und $\frac{\mathcal{F}f(\omega)}{2\pi}$ entspricht den Beitrag der Schwingung $e^{it\omega}$.]

<u>Bsp</u> $f(t)=e^{-a|t|}$, $a>0$.

Dann $\mathcal{F}f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-a|t|}dt.$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{-i\omega t}e^{at}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-at}dt \quad (1)$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-at}dt=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}e^{-(a+i\omega)t}dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\Big|_{0}^{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\frac{1-e^{-(a+i\omega)b}}{a+i\omega}=\frac{1}{a+i\omega} \quad (2)$$

ähnlich $\int_{-\infty}^{0}e^{-i\omega t}e^{at}dt=\frac{1}{a-i\omega}$. (3).

Aus (1), (2), (3) folgt.

$$\mathcal{F}f(w) = \frac{1}{a+iw} + \frac{1}{a-iw} = \frac{a-iw+a+iw}{a^2-(iw)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}f(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}.$$

4.3 Rechenregeln

Die Fouriertransformation hat auf Grund ihrer Ähnlichkeit mit der Laplacetransformation ähnliche Eigenschaften wie die Laplacetransformation, und zwar.

[Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stückweise stetig und (a;b) dann.

(a) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt $\mathcal{F}\{f(at)\}(w) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{w}{a}\right), w\in\mathbb{R}$.

(b) $\forall b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}\{f(t-b)\}(w) = e^{-iwb}\mathcal{F}f(w), w\in\mathbb{R}$.

und $\mathcal{F}\{e^{itb}f(t)\}(w) = \mathcal{F}f(w-b)$

(c) Ist f stetig und stückweise differenzierbar und f' wieder stückweise stetig und (a;b) dann $\mathcal{F}\{f'\}(w) = iw\,\mathcal{F}f(w)$.

(d) Ist $t\mapsto t^n f(t)$ $(n\in\mathbb{N})$ absolut integrierbar, dann ist $\mathcal{F}f$ n-Mal differenzierbar und

$$(\mathcal{F}f)^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$ (79)

Manche Beweisideen: (a) Für $a > 0$

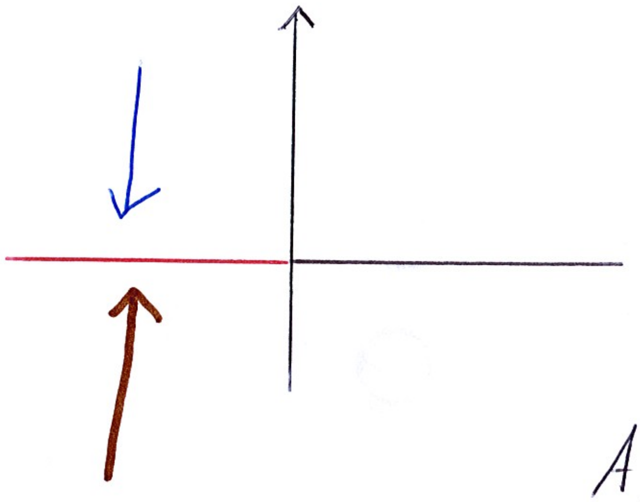
$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(at)\,dt$$

$$\underset{t=\frac{s}{a},\ dt=\frac{ds}{a}}{\overset{s=at}{=\!=\!=}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\frac{s}{a}} f(s)\,\frac{ds}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{a}s} f(s)\,ds}_{\mathcal{F}f\left(\frac{\omega}{a}\right)} = \frac{1}{a}\mathcal{F}f\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Bemerkung: Wenn man (a) rigoroses beweisen möchte muss man das uneigentliche Integral als Limes von Integralen schreiben, und dann die Substitution anwenden.

Bemerkung: Eine Erklärung folgt, warum $\operatorname{Log} z$ nur in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiert ist.



Grund: Wenn man $(-\infty, 0]$ von oben approximiert (siehe Skizze) dann $\operatorname{Arg} z \to \pi$. Wenn man aber $(-\infty, 0]$ von **unten** approximiert, dann $\operatorname{Arg} z \to -\pi$.

Deswegen wenn man versucht $\operatorname{Log} z$ auf $(-\infty, 0]$ fortzusetzen, bekommt man eine Funktion, die nicht stetig ist,

(da $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$).