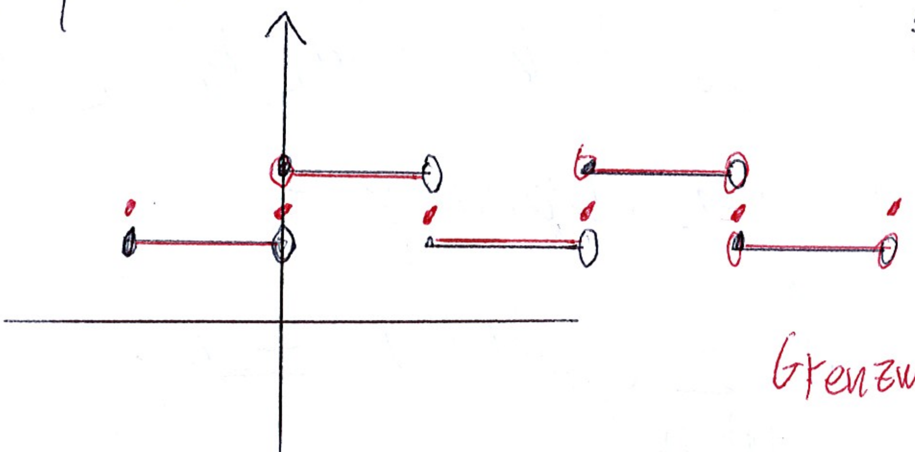
Darstellungssatz für 2π-periodische Funktionen durch Fourierreihen. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodisch und stückweise glatt mit Fourierkoeffizienten a_k, b_k, c_k. Dann gilt für jedes $t\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kt).}$$

Ist f stetig int dann konvergieren die Fourier reihen gegen $f(t)$.

<u>Bsp</u> (gleich wie am Freitag) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ die 2π peridische Funktion mit

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{für } t\in[0,\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{für } t\in[\pi,2\pi). \end{cases}$$



→ Graph von f zusammen mit Grenzwert der Fourierreihe.

Ist $t\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ dann konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$, da f stetig ist it t, Ist $t=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, dann $\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$.
Also konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{3}{4}$.

(14)

Auf dem Raum der 2π-periodischen Funktionen, definieren wir das Skalarprodukt $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

(vergleichen Sie mit $(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_n \overline{y_n}$.).

Dann $\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$,

(Vergleichen Sie mit $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

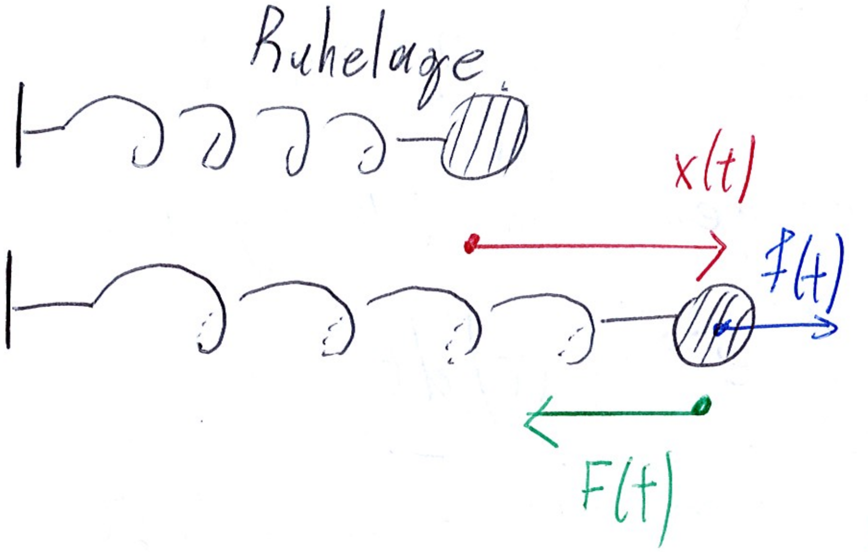
$\|f-g\|$ wird als Abstand zwischen f, g. interpretiert.

<u>Theorem</u>. Sei f eine 2π-periodische stückweise stetige Funktion a_k, b_k, c_k ihre Fourier koeffizienten. Dann gilt.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| f(t) - \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikt} \Big|^2 dt = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \Big|^2 dt = 0.$$

Laplacetransformation. Eine Motivation. 15



$x(t)$: Abstand von Ruhelage an der Zeit t.

$$F(t) = -k\, x(t) \quad (*)$$

$F(t)$: Kraft der Feder

k: Hooksche Konstante

$f(t)$: externe Kraft.

Zweites Newtonsches Gesetz.

$$m\, b(t) = F(t) + f(t) \overset{(*)}{=} -k\, x(t) + f(t)$$

m: Masse des Körpers

$b(t)$: Beschleunigung des Körpers an der Zeit t.

Aber $b(t) = x''(t)$

$$\Rightarrow \boxed{m\, x''(t) = -k\, x(t) + f(t)}$$

Eine solche Gleichung der unbekanten Funktion $x(t)$, mit Ableitungen von ihr heißt Differentialgleichung. Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man solche Gleichungen lösen.

Laplacetransformation: Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ integrierbar auf $[0,b]$ $\forall b>0$. Sei $s\in\mathbb{C}$. Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\mathcal{L}\{f\}(s)=\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt}.$$

(Wir integrieren bezüglich t also hängt das Ergebnis nur von s ab!).

Dann heißt $\mathcal{L}\{f\}(s)$ Laplacetransformierte von f an der Stelle s.

Def $\Lambda(f):=\{s\in\mathbb{C}\mid\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \text{ konvergiert}\}$

Bsp Sei $f(t)=e^{at}$, $a\in\mathbb{C}$.

Dann $\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}\,dt.$ (1)

Wenn $a=s$ bekommen wir

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b 1\,dt=\lim\limits_{b\to\infty} b=\infty.$

Also konvergiert das Integral nicht.

wenn $a \neq s$ bekommen wir.

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Bigg|_{t=0}^{t=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Bigg(\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} - \underbrace{\frac{e^{(a-s)0}}{a-s}}_{= \frac{1}{s-a}} \Bigg).$$

$$= \frac{1}{s-a} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{e^{(a-s)b}}{a-s}}_{= \begin{cases} 0, \text{ wenn } \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(s). \; * . \\ \pm\infty \text{ oder nicht existiert,} \\ \text{wenn } \operatorname{Re}(a) \geq \operatorname{Re}(s). \end{cases}} \quad (*) \quad (**)$$

$*$ Wenn $\operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(s)$ Dann $\operatorname{Re}(a-s) < 0$ $(**)$

Also $\lim_{b\to\infty} \frac{e^{(a-s)b}}{a-s} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{a-s} \Big(\underbrace{e^{\operatorname{Re}(a-s)b}}_{\downarrow b\to\infty \;\; 0 \text{ wegen } (*)} \underbrace{e^{i\operatorname{Im}(a-s)b}}_{\text{Exponent imaginär} \Rightarrow \text{Betrag ist immer } 1.} \Big)$

Also konvergiert das Produkt gegen 0.

Also ist. $\Lambda(f) := \{ s \in \mathbb{C}, \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \}$

und $$\boxed{\int_0^\infty e^{-st} e^{-at} \, dt \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{s-a}} \quad \forall s \in \Lambda(f).$$

2.3 <u>Definition</u> (i) $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ heißt von <u>Exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$</u>, falls es $M > 0$ gibt mit $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$ für alle $t \geq 0$.

und <u>exponentiell beschränkt</u>, falls f von exponentieller Ordnung γ ist für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$.

<u>Bsp</u> 1) e^{at} ist von exponentieller Ordnung $\operatorname{Re}(a)$ $\forall a \in \mathbb{C}$, da

$$|e^{at}| = |e^{\operatorname{Re}(a)t} \underbrace{e^{i \operatorname{Im}(a) t}}| = \underbrace{e^{\operatorname{Re}(a)t}} \leq 1 e^{\operatorname{Re}(a)t}.$$

Exponent Imaginär $\Rightarrow$ Zahl hat Betrag 1

Da auch diese Funktion immer positiv

Also wird die Definition erfüllt mit $M = 1$.

2) te^{2t} ist von exponentieller Ordnung 3, da $te^{2t} \leq e^{3t}$ $\forall t \geq 0$

(weil $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \geq t$, wenn $t \geq 0$).

Also ist te^{2t} von exponentiell beschränkt

3) $g(t) = e^{t^2}$ ist nicht exponentiell beschränkt,

Da $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\gamma t}} = \lim\limits_{t \to \infty} e^{t^2 - \gamma t} = \lim\limits_{t \to \infty} e^{t(t-\gamma)} = \infty$.

$\forall \gamma > 0$. (egal wie groß γ ist).

Also egal wie groß γ ist gibt es kein $M > 0$ mit $e^{t^2} \leq Me^{\gamma t}$.

Ist f von exponentieller Ordnung γ, dann existiert $\mathcal{L}\{f\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$, und

$$\left| \mathcal{L}\{f\}(s) \right| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von (**)

Rechenregeln: Sind $f, g: [0,\infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ, dann

(a) so ist $\alpha f + \beta g$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s),$$

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > \gamma.$$

Beispiel: e^{it}, e^{-it} sind von exponentieller Ordnung 0 und $\mathcal{L}\{e^{it}\}(s) = \frac{1}{s-i}$ (3)

$\mathcal{L}\{e^{-it}\}(s) = \frac{1}{s+i}$ (4) (heute gezeigt worden).

Deshalb sind $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2}$ auch von exponentieller Ordnung 0, und wenn $\operatorname{Re} s > 0$ gilt.

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right\}(s)$$

$$\overset{(3),(4)}{\underset{(a)}{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s+i+s-i}{(s-i)(s+i)} = \frac{1}{2}\,\frac{2s}{s^2+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > 0}$$

ähnlich $\boxed{\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > 0}$