Erinnerung $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } t < 0 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{\sigma * \dots * \sigma}_{n-\text{Mal}} = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall t \geq 0 \quad (*)$

Beweis: IA, Für $n = 1$ stimmt $(*)$

da $\sigma = 1 = \dfrac{t^{1-1}}{(1-1)!} \quad \forall t \geq 0.$

IS. Annahme $(*)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

z.z $\underbrace{\sigma * \dots * \sigma}_{(n+1)\text{ Mal}} = \dfrac{t^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$

In der Tat

$$\underbrace{\sigma * \dots * \sigma}_{(n+1)\text{ Mal}} = \sigma * (\underbrace{\sigma * \dots * \sigma}_{n\text{ Mal}}) \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \sigma * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \int_0^t \underbrace{\sigma(t-z)}_{=1 \text{ da } t-z \geq 0 \text{ für } z \in [0,t]} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} dz$$

$$= \int_0^t \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} dz = \frac{z^n}{(n-1)!\, n} \Bigg|_{z=0}^{z=t} = \frac{t^n}{n!} \text{ was zu}$$

zeigen war. Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$. Also

$$\underbrace{\sigma * \cdots * \sigma}_{(n+1)\text{ Mal}} = \frac{t^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \forall t \geq 0.$$

letztes Mal
$$\mathcal{L}\{\underbrace{\sigma * \cdots * \sigma}_{(n+1)\text{ Mal}}\}(s) = \frac{1}{s^{n+1}}, \text{ wenn } \operatorname{Re} s > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Folgerung
$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ wenn } \operatorname{Re} s > 0}$$

Aus der letzten Formel und die Dämpungsregel folgt.

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ wenn } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a}$$

z.B $\mathcal{L}\{e^{3t} t^{1000}\}(s) = \dfrac{1000!}{(s-3)^{1001}}$, wenn $\operatorname{Re} s > 3$

2.11 Komplexe Partialbruchzerlegung.

Seien $P(s), Q(s)$ komplexe Polynome mit $\text{Grad}\, P(s) < \text{Grad}\, Q(s)$. ~~und~~

Da existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $Q(s) = \mu (s-\lambda_1)^{k_1} \cdots (s-\lambda_m)^{k_m}$

wobei $\mu \in \mathbb{C}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die verschiedenen komplexen Nullstellen von $Q(s)$ sind.

Dann gibt es komplexe Koeffizienten $a_l^{(j)}$ $(j = 1, \dots, m,\ l = 1, \dots, k_j)$ so, dass

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_1^{(1)}}{s-\lambda_1} + \dots + \frac{a_{k_1}^{(1)}}{(s-\lambda_1)^{k_1}}$$

$$+ \frac{a_1^{(2)}}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{a_{k_2}^{(2)}}{(s-\lambda_2)^{k_2}}$$

$$+ \dots +$$

$$+ \frac{a_1^{(m)}}{s-\lambda_m} + \dots + \frac{a_{k_m}^{(m)}}{(s-\lambda_m)^{k_m}}$$

$\forall s \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k$

<u>Bsp</u> (Klausur 2013). Bestimmen Sie eine Funktion f, mit $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)^3}$, wenn $\operatorname{Re} s > 2$.

Lösung: Es gibt $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}, \text{ wenn } s \neq 1,2.$$

Wir mussen A, B, C, D bestimmen.

$$\xrightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{mit } (s-1)(s-2)^3} \quad 1 = A(s-2)^3 + (s-1)(s-2)^2 B + (s-1)(s-2)C + (s-1)D \quad \forall s \neq 1,2.$$

Brüche sind weg!!

Limes $s \to 1 \Rightarrow \quad 1 = A(1-2)^3 \Rightarrow A = -1$ (1)

Limes $s \to 2 \Rightarrow \quad 1 = (2-1)D \Rightarrow D = 1.$ (2)

(Wir haben den Limes s gegen die Nullstellen 1,2 betrachtet und A, D bestimmt).

Jetzt ersetzen wir andere Werte von s um B, C zu bestimmen.

$$s = 0 \xrightarrow{A=-1,\, D=1} \quad 1 = (-1)(0-2)^3 + (-1)(-2)^2 B + 2C - 1.$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 8 - 4B + 2C - 1 \Rightarrow \boxed{2B - C = 3} \; (3)$$

$s=3 \xrightarrow[D=1]{A=-1} 1=-1+2B+2C+2\cdot 1$

$\Rightarrow \boxed{B+C=0}$ (4)

(3) + (4) $\Rightarrow$ $3B=3 \Rightarrow B=1$. (5)

Also $C=-1$. (6).

Aus (1), (2), (5), (6) folgt

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)^3} = -\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{(s-2)^3}.$$

Also wir müssen eine f bestimmen, so, dass wenn $\operatorname{Re} s>2$ dann

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = -\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{(s-2)^3}.$$

Da $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, wenn $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

bekommen wir $\frac{1}{(s-a)^{n+1}} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}t^n}{n!}\right\}(s)$

$n=0,\ a=1 \Rightarrow \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{1t}t^0}{0!}\right\} = \mathcal{L}\{e^t\}(s)$

ähnlich $\frac{1}{s-2} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)$

$n=2$, $a=2$: $\frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}t^1}{1!}\right\}(s) = \mathcal{L}\{te^{2t}\}(s)$

$n=3$, $a=3$: $\frac{1}{(s-2)^3} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}t^2}{2!}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}e^{2t}\right\}(s)$

Also $\frac{1}{(s-1)(s-2)^3} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}$

$= \mathcal{L}\left\{-e^t + e^{2t} - te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\right\}(s)$

[Reelle Partialbruchzerlegung.

Sind $P(s), Q(s)$ reelle Polynome mit Grad $P(s) <$ Grad $Q(s)$, so treten nicht-reelle Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf und können zusammengefasst werden:]

Bsp $\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i}$.

$$\xrightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{mit } (s-1)(s^2+1)} \quad 1 = (s^2+1)A + (s-1)(s+i)B + (s-1)(s-i)C.$$

$$s \to 1 \implies 1 = (1^2+1)A \implies A = \frac{1}{2}.$$

$$s \to i \implies 1 = (i-1)2i\,B \implies B = \frac{i-1}{4}.$$

$$s \to -i \implies C = \frac{-i-1}{4}.$$

$$\text{Also} \quad \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \underbrace{\frac{-i-1}{4}}_{\beta}\,\frac{1}{s+i} + \frac{i-1}{4}\,\frac{1}{s-i}$$

$a=0$ $w=1$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\sin t\}(s).$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}\right\}(s), \text{ wenn } \operatorname{Re} s > 1.$$