2.12 Bemerkung: Differentiation für stetige stückweise differenziebare Funktionen.

Die Regel

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

gilt nicht nur wenn f n-mal stetig differentierbar ist. Es reicht, wenn f stückweise differentierbar ist d.h.

Es gibt eine Folge $(t_m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \to \infty$ so, dass f in $[0, \infty) \setminus \{t_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ n-mal stetig differenzierbar ist und $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für $k = 1, \dots, n$ gilt.

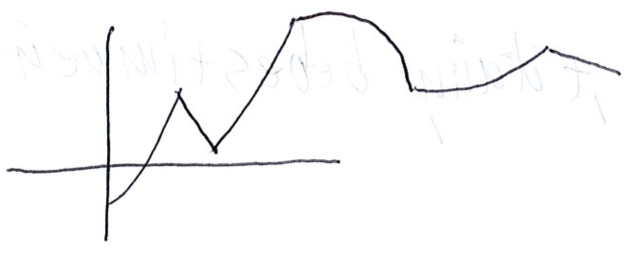
(i) $f^{(k)} : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(ii) Die einseitigen Grenzwerte $f^{(k)}(t_j +)$, $f^{(k)}(t_j -)$ existieren.

In diesem Fall gilt.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(s)\} = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

In Prüfungsrelevant Fällen gibt es "+" nicht.



← Skizze einer solchen typischen f.

Eine Tafel mit $f(t)$ und $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$.

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}\, t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ (1)
$e^{at} \cos \omega t \; t^n$	$\frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(s-a-i\omega)^{n+1}} + \frac{n!}{(s-a+i\omega)^{n+1}}\right)$
$e^{at} \sin \omega t \; t^n$	$\frac{1}{2i}\left(\frac{n!}{(s-a-i\omega)^{n+1}} - \frac{n!}{(s-a+i\omega)^{n+1}}\right)$
$g * h(t)$	$\mathcal{L}\{g\}(s)\, \mathcal{L}\{h\}(s)$.
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
$g^{(n)}(t)$	$s^n \mathcal{L}\{g\}(s) - s^{n-1}\,(0) - \ldots - s g^{(n-2)}(0) - g^{(n-1)}(0)$.
$a g(t) + h(t)$	$a \mathcal{L}\{g\}(s) + \mathcal{L}\{h\}(s)$

$n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Herleitung der zweiten Zeile.

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos \omega t \; t^n\} \underline{\underline{\cos\omega t = \tfrac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{(a+i\omega)t}\, t^n\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{(a-i\omega)t}\, t^n\}$$

$$\underline{\underline{(1)}} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(s-(a+i\omega))^{n+1}} + \frac{n!}{(s-(a-i\omega))^{n+1}}\right).$$

[2.15 Sprungantwort eines Systems. (43)

Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(S)\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \; t \geq 0 \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \; y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, \ldots, y'(0) = y_1, \; y(0) = y_0 \end{cases}$$

Die <u>Sprungantwort</u> des Systems ist die Lösung von (S) zur äußeren Anregung

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$ mit Anfangswerten

$$y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0.$$]

<u>Bsp</u> (i) Mittels Laplacetransformation bestimmen Sie die Sprungantwort des R, L kreises ($L J'(t) + R J(t) = U(t)$)

Induktivität — Widerstand — Strom — Spannung

(ii) Ist die Sprungantwort

$$J(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-8t}, \; t \geq 0,$$ bestimmen Sie R, L

Lösung: (i) Die Sprungantwort ist die Lösung von (4)

$$\begin{cases} L\,J'(t) + R\,J(t) = \sigma(t) \\ J(0) = 0 \end{cases}$$

Die Laplacetransformation gibt.

$$L \underbrace{\mathcal{L}\{J'\}(s)} + R\,\mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{1}{s}.$$

$$= s\,\mathcal{L}\{J\}(s) - \underbrace{J(0)}_{=0}.$$

$$\Rightarrow (Ls + R)\,\mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{1}{s}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{1}{s}\,\frac{1}{Ls+R}. \quad (1)$$

Jetzt Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{s}\,\frac{1}{Ls+R} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ls+R} \quad (2)$$

$$\xRightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{mit } s(Ls+R)} \quad 1 = A(Ls+R) + Bs.$$

$$s \to 0 \Rightarrow A = \frac{1}{R} \quad (3)$$

$$s \to -\frac{R}{L} \Rightarrow B\left(-\frac{R}{L}\right) = 1 \Rightarrow B = -\frac{L}{R} \quad (4)$$

Aus (2), (3), (4) folgt 15.

$$\frac{1}{s}\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{R}\frac{1}{s} - \frac{L}{R(Ls+R)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{s}\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right). \quad (5).$$

Aus (1), (5) folgt.

$$\mathcal{L}\{J\}(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\Rightarrow J(t) = \frac{1}{R}\left(\sigma(t) - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\overset{t\geq 0}{=} \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

(ii) $h(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-8t}\right) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$

$\Rightarrow$ $R = 2$ und $\frac{R}{L} = 8 \Rightarrow$

$R = 2$ und $L = \frac{1}{4}.$

Die folgenden Formeln wären auch nützlich: ($f(t)$ und $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$).

$F(s)$	$f(t)$	
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{e^{at}\, t^{n-1}}{(n-1)!}$	$a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.
$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos wt$	
$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\sin wt$	
$\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$	$t\cos(wt)$	
$\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$	$t\sin(wt)$.	