3.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $F: G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ <u>komplex differenzierbar</u>, wenn der Limes

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt $F'(z_0)$ die <u>komplexe Ableitung von F in z_0</u>.

Die Funktion heißt <u>holomorph</u> in G, falls F in jedem $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

<u>Bsp</u> $F(z) = z^m$ ist holomorph in $\mathbb{C}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ und $F'(z) = m z^{m-1}$.

Beweis für $m \in \mathbb{N}$. $\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} =$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{m-1} + z^{m-2} z_0 + \ldots + z z_0^{m-2} + z_0^{m-1})}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} (z^{m-1} + z^{m-2} z_0 + \ldots + z z_0^{m-2} + z_0^{m-1}) = m z_0^{m-1}.$$

3.2 Rechenregeln

[Die Summen-, Produkt- und Kettenregel gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit, und ebenso die Quotientenregel (so lange der Nenner nicht Null ist) und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion]

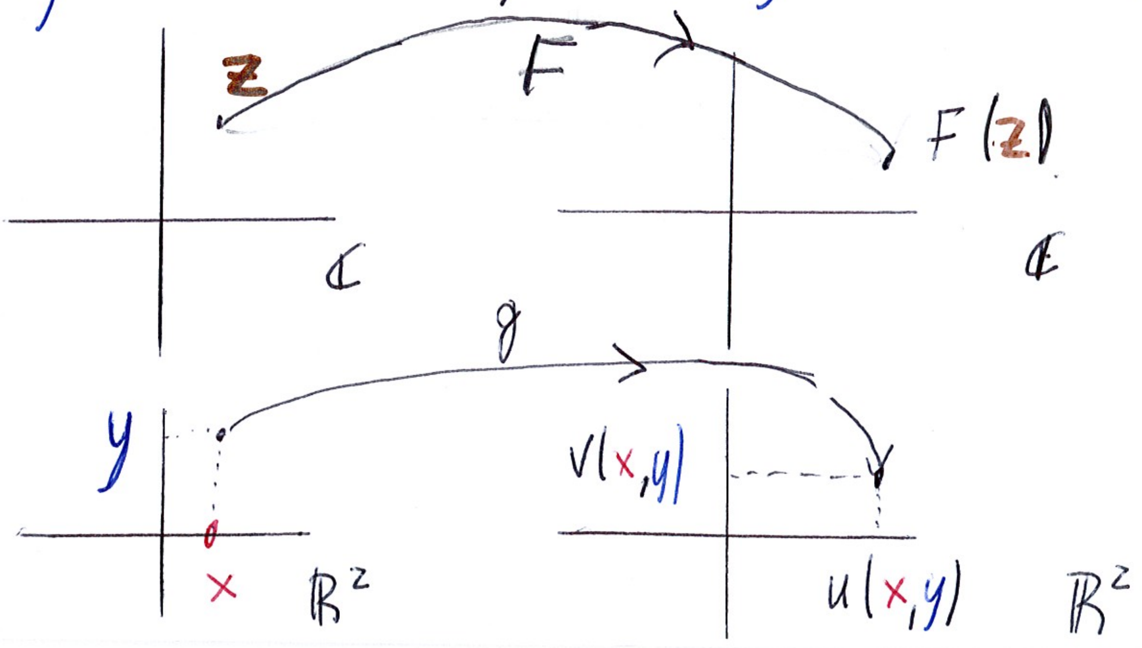
$$\left(f^{-1}\right)'(z) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(z)\right)}.$$

3.3 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F: G \to \mathbb{C}$.

Sei $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und

$u(x,y) = \operatorname{Re} F(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} F(z)$.



Die Abbildung g mit $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ ist

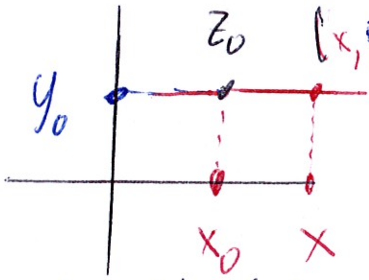
eine Darstelung von F in $\mathbb{R}^2$.

Ist F differentierbar in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$

dann gibt es $c \in \mathbb{C}$: mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = c .$$

Wir approximieren z_0 in zwei verschiedenen Wegen.



1. $x \to x_0$, $y = y_0$.

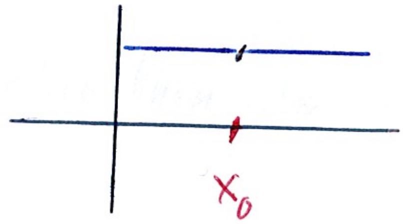
Dann $$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{(u(x,y_0) + iv(x,y_0)) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)}$$

Entlang dieses Weges wird der Limes

$$c = \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x,y_0) - u(x_0,y_0)) + i\; v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$= u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0). \qquad (1)$$

2 $\quad x = x_0, \quad y \to y_0$



Dann $\displaystyle \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\big(u(x_0,y)+iv(x_0,y)\big)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)}$

$$= \frac{\big(u(x_0,y)-u(x_0,y_0)\big)+i\big(v(x_0,y)-v(x_0,y_0)\big)}{i(y-y_0)}.$$

Also wird der Limes entlang dieses Weges.

$$C = \lim_{y\to y_0} -i\,\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0} + \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{(y-y_0)}$$

$$= -i\,u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0) \quad (2)$$

Aus (1),(2) folgt. (da v,u reel sind).

$$\boxed{u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)} \quad (3).$$

weil der Limes C unabhangig von dem Weg ist.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

Also haben wir gezeigt:
[Ist F in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar dann gilt (3)]

Umgekehrt gilt.

<u>Satz 3.3.1</u> [Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ eine C^1-Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (3), so ist die Funktion F (definiert oben) holomorph in G].

Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ dbar in (x_0, y_0) und gilt (3) dann ist F dbar in z_0

Bsp $f(z) = \bar{z}$. $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$.
$u_x = 1$, $v_y = -1$. Also $u_x \neq v_y$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$.
Also wird (3) niergendwo erfüllt also ist f niergendwo differenzierbar.

3.4 Potenzreihen

[Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe

komplexe Koeffizienten

Entwicklungspunkt

mit Konvergenzradius R. Dann ist

$$F : K(z_0, R) \mapsto \mathbb{C}, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

holomorph in $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$

und $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$, in $K(z_0, R)$]

Bsp 1 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ sind holomorph in $\mathbb{C}$, weil die entsprechenden Potenzreihen Konvergenzradius ∞ haben.

Bsp 2 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist holomorph in $\{z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1\}$

weil $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$.

(Erinnerung $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, wenn $|z| < 1$)

3.5 Holomorphie von Laplacetransformierten

[Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann ist $F:=\mathcal{L}\{f\}$ auf $\{s\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}s>\gamma\}$ holomorph (und beliebig oft komplex differenzierbar. und für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s),\quad \operatorname{Re}s>\gamma.]\ (1)$$

Illustration der Formel (1). (ohne Beweis)

Für $n=1$ haben wir

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \Rightarrow F'(s)=\frac{d}{ds}F$$

$$=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)f(t)\,dt$$

$$\underline{\underline{\frac{d}{ds}(e^{-st})=e^{-st}(-t)}}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt=\mathcal{L}\{(-t)f(t)\}(s).$$

Das ist kein Beweis, weil man überprüfen müsste ob man $\frac{d}{ds}$ und integral dt vertauschen darf. (Für $n\in\mathbb{N}$ folgt (1) mit Induktion)