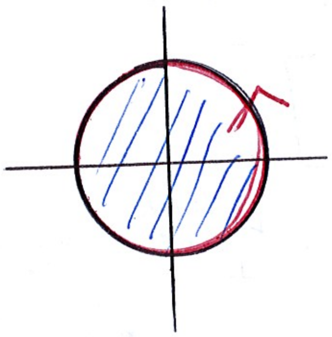
3.6 Kurvenintegrale

[Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ die stückweise stetig differenzierbar ist. γ heißt <u>einfach geschlossen</u> falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ und γ injektiv ist auf $[a,b)$. Eine einfach geschlossene Kurve heißt <u>positiv orientiert</u>, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.]

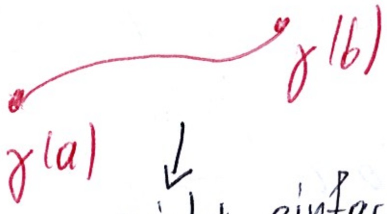
<u>Bsp 1</u> Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.



γ ist einfach geschlossen, da $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$ und γ ist injektiv in $[0,2\pi]$.

γ ist positiv orientiert, da $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ links von γ liegt.

$\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{it}$ ist nicht einfach geschlossen da z.B. $\gamma(\pi) = \gamma(3\pi)$.



nicht einfach geschlossen, da $\gamma(a) \neq \gamma(b)$

nicht einfach geschlossen da der Punkt A mindestens zweimal getroffen wird.

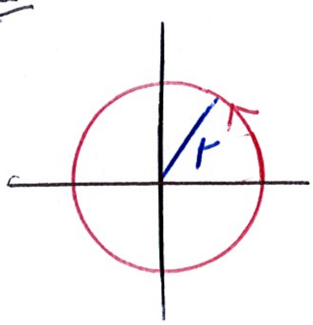
Bemerkung 3.6.1 [Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen $F: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma: [a,b] \to G$ differenzierbar. Dann $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\, \gamma'(t)$.]

Definition 3.6.2 [Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $F: \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(z)\,dz = \int_a^b F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.]$$

$\left(= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \right.$ wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und t_i die Stellen sind wo $\gamma^{\varepsilon}(t)$ nicht differenzierbar ist$\left.\right)$.

Bsp. 2 Sei $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = r e^{it}$



und $F(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dann

$$\int_\gamma F\,dz = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \, r i e^{it} \, dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} \, dt.$$

Ist $n = -1$ dann folgt $\int_\gamma F\,dz = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i$

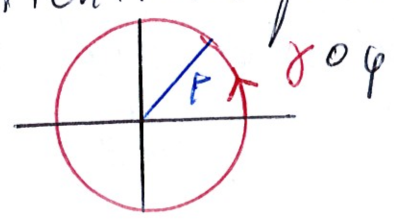
Ist $n \neq -1$, dann

$$\int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} \, dt = i \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1}\Big(\underbrace{e^{2\pi i(n+1)}}_{=1} - 1\Big) = 0.$$

Also $\int_\gamma F\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{wenn } n = -1 \\ 0, & \text{wenn } n \neq -1. \end{cases}$

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar und bijektiv und streng monoton wachsend, dann heißt $\gamma \circ \varphi$ orientierungstreu Umparametrisierung von γ. In diesem Fall gilt $\int_\gamma F\,dz = \int_{\gamma\circ\varphi} F\,dz$.

<u>Bsp 3</u> Ist γ wie im <u>Bsp 2</u> und $\varphi : [0,\pi] \to [0,2\pi]$, $\varphi(t) = 2t$ dann $\gamma\circ\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma\circ\varphi(t) = re^{i2t}$ ist eine orientierungstreu Umparametrisierung von γ.



57

$$\int_{\gamma\circ\varphi} F(z)\,dz = \int_c^d F(\gamma(\varphi(t)))\,(\gamma(\varphi(t)))'\,dt$$

$$= \int_c^d F(\gamma(\varphi(t)))\,\gamma'(\varphi(t))\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{du}$$

$\underline{u=\varphi(t)}$ $$\int_a^b F(\gamma(u))\,\gamma'(u)\,du = \int_\gamma F(z)\,dz.$$

$du = \varphi'(t)\,dt$

$u(c) = \varphi(c) = a$

$u(d) = \varphi(d) = b$

Abschätzung 3.6.3. Sind F und γ wie in der Definition 3.6.2 so gilt.

$$\left|\int_\gamma F(z)\,dz\right| \leq L(\gamma)\cdot M$$

M: $\max\{|F(z)| : z \in \gamma([a,b])\}$

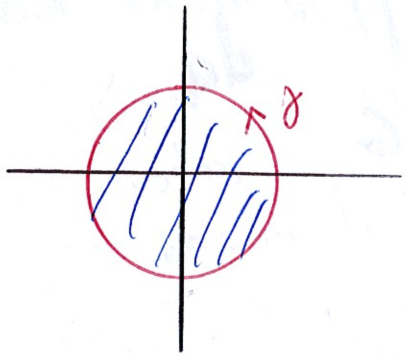
$L(\gamma)$: ($\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ Länge von γ).

Beweis $$\left|\int_\gamma F(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b F(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|F(\gamma(t))|}_{\leq M}\,|\gamma'(t)|\,dt \leq \int_a^b M\,|\gamma'(t)|\,dt = M\,L(\gamma).$$

3.7 Cauchyscher Integralsatz. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen $F: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma: [a,b] \to G$ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve. Ist das von γ umlaufene Gebiet Teilmenge von G dann gilt $\int_\gamma F\,dz = 0$

Bsp 4 Sei γ die Kurve von Bsp 2 und $F(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \subset \mathbb{C}$

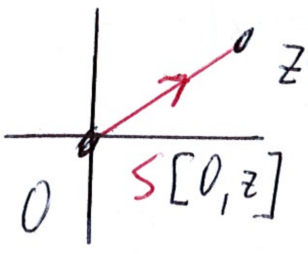


Also $\int_\gamma F dz = 0$.

Wenn $n \neq -1$ ist $\int_\gamma F dz \neq 0$ und die Annahme des Cauchyschen Integralsatzes wird nicht erfüllt. $F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph, aber $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ ist keine Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Idee des Beweises: im Fall $G = \mathbb{C}$.

Die Funktion $H(z) := \int_{S[0,z]} F(z) dz$ ist



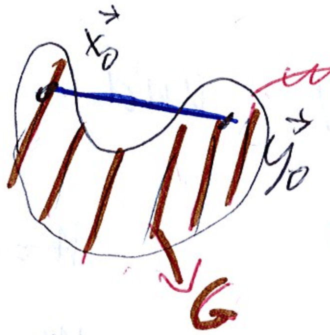
eine Stammfunktion von F. ($H'(z) = F(z)$). Deshalb ist

$$\int_\gamma F dz = \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b H'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (H(\gamma(t)))' dt$$

$$= H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)) = 0, \text{ da } \gamma(a) = \gamma(b).$$

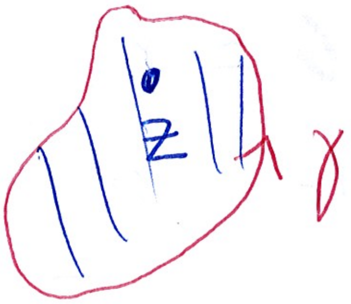
Cauchysche Integralformel: [Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex. (konvex bedeuten $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in G \Rightarrow S[\vec{x}_0, \vec{y}_0] \subset G$



G ist hier nicht konvex da $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in G$ aber $S[\vec{x}_0, \vec{y}_0]$ ist keine Teilmenge von G)

Sei $\gamma : [a,b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z, welches innerhalb von γ liegt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$



Bsp Ist $F = 0$ auf γ dann $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overbrace{F(\zeta)}^{=0}}{\zeta - z} \, d\zeta = 0$ innerhalb von γ.

Aus der Formel folgt, wenn wir F auf γ kennen, dann können wir F innerhalb von γ berechnen.