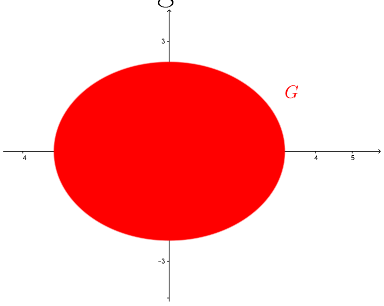
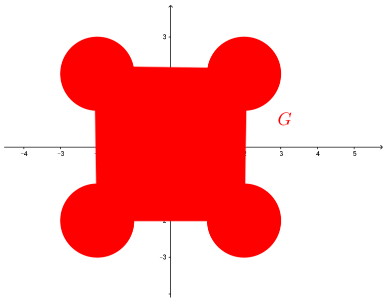
Aufgabe 2 ohne Polarkoordinaten

Gesucht: Volumen von $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x^2 + y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\right\}$
Erster Schritt: Schreibe $\overline{G}$ als

$$\overline{G} = \{(x, y) \colon x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

Doch reicht überhaupt eine solche Graphenzwischenschnit tbeschreibung aus? Was sind a, b? Da nur quadratische Terme auftauchen, ist es klar das G x und y-achsen symmetrisch ist. Zwei mögliche Erscheinungsbilder einer solchen Menge:





Wir suchen die größtmöglichen Werte für x innerhalb $\overline{G}$. Wie das Bild zeigt ist nicht klar, dass die Werte für $y = 0$ gegeben sind. Dazu ersetzen wir die Ungleichung durch eine Gleichung und lösen nach x auf (wir substituieren $z = x^2$). Das liefert

$$z^2 + z(2y^2 - 3) - 4y^2 + y^4 = 0$$
$$z_{1,2} = -y^2 + 3/2 \pm \sqrt{y^2 + 9/4}$$

also $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-y^2 + 3/2 \pm \sqrt{y^2 + 9/4}}$. Die Funktion $-y^2 + 3/2 \pm \sqrt{y^2 + 9/4}$ ist streng monoton wachsend für $y < 0$ und streng monoton fallend für $y > 0$. Daher ist $x = \sqrt{3/2 + \sqrt{9/4}} = \sqrt{3}$ der größtmögliche Wert für x und $-\sqrt{3}$ der kleinstmögliche Wert für x. Nun kann man die Gleichung ebenso nach y auflösen und weitere Überlegungen zeigen, dass

$$\overline{G} = \{(x, y) \colon x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{4}], y \in [-\sqrt{-x^2 + 2 + \sqrt{4 - x^2}}, \sqrt{-x^2 + 2 + \sqrt{4 - x^2}}]\}$$

Damit: $I(G) = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{-x^2 + 2 + \sqrt{4 - x^2}} dx = \ldots = \frac{7}{2}\pi.$