

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: Das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x + \frac{z}{1+y^2} \\ \arctan(y) \end{pmatrix}$$

Die Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^{10} e^{1-t^2} \\ t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (xy + y^2) d(x, y)$

b) $\iint_{[-1,0] \times [0,2]} \cosh(2x + y) d(x, y)$

Aufgabe 3: Skizzieren Sie die Mengen $B \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt $\iint_B d(x, y)$.

a) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x \}$

b) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 < x < 4 - y^2 \}$

Aufgabe 4: Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\vec{v}: \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0 \} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

Aufgabe 5: Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

- a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.
- b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\gamma(t) = (1 - t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 6: Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge, und berechnen Sie den Wert der Integrale.

a) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$

b) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y dx dy$