

## Höhere Mathematik II

### für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

#### 12. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

**Aufgabe 1:** a) Bestimmen Sie für alle  $a, b, c > 0$  das Volumen  $\iiint_E d(x, y, z)$  des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

b) Sei  $0 < r < R$ . Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B \frac{y}{x} d(x, y), \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \in [r, R], |y| \leq x\}.$$

**Aufgabe 2:** Sei  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\}$  und  $\gamma$  der positiv orientierte Rand von  $G$ .

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von  $\gamma$  mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $G$ . (*Hinweis:* Leibnizsche Sektorformel)

**Aufgabe 3:** Die Funktion  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei stetig differenzierbar.

a) Geben Sie eine Bedingung für  $\vec{v}$  an, die erfüllt sein muss, wenn ein Vektorfeld  $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  existiert mit  $\nabla \times \vec{w} = \vec{v}$ .

(Man nennt  $\vec{w}$  in diesem Falle ein *Vektorpotential* von  $\vec{v}$ .)

b) Überprüfen Sie diese Bedingung für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie ein Vektorpotential  $\vec{w}$  von  $\vec{v}$ .

*Hinweis:* Es gibt ein Vektorpotential  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  mit  $w_3 = 0$ .

**Aufgabe 4:** a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}.$$

b) Die beschränkte Menge  $B \subset \mathbb{R}^3$  sei durch die Ebenen  $x = 0, y = 0, z = 0$  und  $x + y + 2z = 1$  begrenzt. Berechnen Sie das Integral  $\iiint_B \sin z d(x, y, z)$ .

**Aufgabe 5:** Beschreiben Sie die folgenden Mengen mittels Polarkoordinaten.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (R \geq r \geq 0)$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq ax\} \quad (R \geq 0, a > 0)$$

**Aufgabe 6:** Die seit Jahren bewährte Marzipankartoffel

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

muss sich dieses Jahr der neuen Marzipankartoffel

$$\widetilde{M} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq \sqrt{3-x^2} \sqrt{3-y^2} \right\}$$

erwehren, die 3 Prozent billiger angeboten wird. Welche der beiden würden Sie kaufen?