Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dr. Jens Babutzka

SS 2016
12.07.2016

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

13. Übungsblatt

Aufgaben 1-3 werden in der Übung besprochen, Aufgaben 4-6 im Tutorium.

Aufgabe 1: a) Beschreiben Sie die folgende Menge mittels Kugelkoordinaten.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 2, \, x < 0, \, y \ge 0, \, z \le 0\}$$

b) Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \le 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} & \text{für } 0 \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le 1\,, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse $\iiint\limits_B \rho(x, y, z)\, d(x, y, z)$.

Aufgabe 2: Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(u, v) \; : \; (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ mit $\vec{g}(u, v) := (u + v, u - v, 2uv)$. Weiter sei $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Aufgabe 3: Gegeben sind

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$$

und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, \, z > 0\}$.

a) Berechnen Sie $I = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ direkt mittels der Definition des Oberflächenintegrals.

b) Berechnen Sie I mittels des Stokesschen Integralsatzes.

Hinweis: $\int\limits_0^x \sin^2(\lambda t) dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\lambda} \sin(2\lambda x)$.

Aufgabe 4: Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \, do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0, 0, 1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \le z \le 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} \, dr = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \big\{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

Aufgabe 6: Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche

$$\mathcal{F} = \big\{(x, y, y^2 - x^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq 3\big\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.