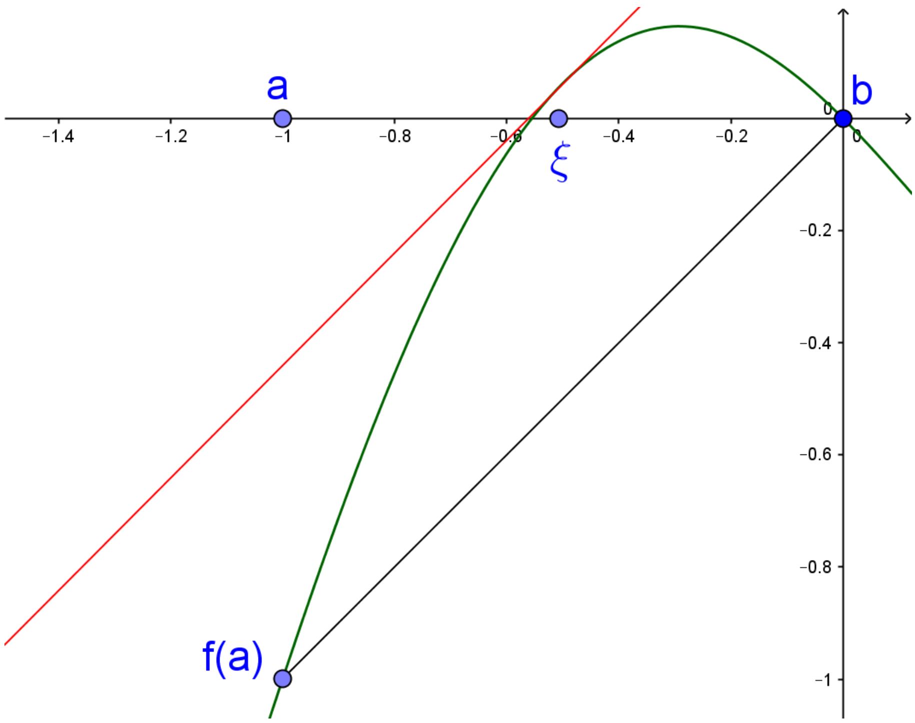
Erinnerung: Satz von Taylor (eindimensional) aus HM 1

Ausgangspunkt: Mittelwertsatz

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Satz von Taylor: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differenzierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

- Der Ausdruck $(P_n(f,x_0))(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ heißt n-tes Taylorpolynom.
- Die Funktion $g(x) = f(x) - (P_n(f,x_0))(x)$ erfüllt $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$.