Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS 2016
19.09.2016

Modul-Prüfung: Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1: (8+2 Punkte)

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und untersuchen Sie A auf Diagonalisierbarkeit. Bestimmen Sie ggf. eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS = D$.

b) Geben Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die sich nicht diagonalisieren lässt, und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 2: (3+4+3 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, in denen f stetig ist.
Hinweis: Für $a, b \geq 0$ gilt z.B. $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ oder auch $ab \leq \frac{a^3}{3} + \frac{2b^{3/2}}{3}$.

b) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\partial_x f$ in allen Punkten, in denen sie existiert. Ist $\partial_x f$ stetig in $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + z^2 - 3xyz + x^4 + 2y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,-1,1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

Aufgabe 3: (5+5 Punkte)

a) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von g und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

b) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2,$$

auf dem Ellipsoid $E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8\}$.
Hinweis: Die Existenz des Maximums dürfen Sie als gegeben betrachten.

Aufgabe 4 befindet sich auf der Rückseite.

Aufgabe 4: (4+6 Punkte)

a) Sei $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(y) \\ \frac{x}{y} + z\cosh(y) \\ \sinh(y) \end{pmatrix}$ definiert auf der Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ y > 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ auf M ein Potential besitzt und berechnen Sie ein Potential.

(ii) Die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 e^{1-t^4} \\ t+1 \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

b) Gegeben sei die Menge

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\right\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x+2y \\ y-5x \\ 2z^2 \end{pmatrix}.$$

Die Oberfläche von V wird mit F bezeichnet. Berechnen Sie

$$\iint\limits_F \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an F bezeichnet.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse sind ab **17.10.2016** unter `http://www.math.kit.edu/iana1/` im Internet einsehbar.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **20.10.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal Neue Chemie (Geb. 30.46) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **24.10.2016** bis **28.10.2016**.