Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS 2016
19.09.2016

Modul-Prüfung: Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge der Klausur

Lösungen zu Aufgabe 1: a) Die Matrix A ist symmetrisch, es gibt also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und insbesondere ist A diagonalisierbar. Es ist

$$\det(A-\lambda Id) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 4\\ 2 & 2-\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -1+\lambda & 0\end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5),$$

also sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 5$ die Eigenwerte von A. Der Eigenraum $E_A(-1)$ ist gegeben durch

$$E_A(-1) = \ker\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

Analog:

$$E_A(1) = \ker\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E_A(5) = \ker\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

Man hätte den Eigenvektor zu λ_3 auch als Kreuzprodukt der beiden anderen Eigenvektoren berechnen können, da A symmetrisch ist. Wir definieren $S = \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, dann gilt $S^{-1}AS = D = \operatorname{diag}(-1,1,5)$.

b) Wir wählen $M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Dann ist $\det(M-\lambda I) = -\lambda^3$, also ist $\lambda_1 = 0$ dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes ist 3. Allerdings ist $\ker(A)$ zweidimensional und damit ist die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 2. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit verschieden sind, ist A nicht diagonalisierbar.

Lösungen zu Aufgabe 2: a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Wir untersuchen jetzt die Stetigkeit in $(0,0)$. Sei (x_n,y_n) eine Folge mit $(x_n,y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Dann: $|f(x_n,y_n)| \leq \frac{|x_n|^3/3+2/3|y_n|^{9/4}}{x_n^2+y_n^4} \leq \frac{|x_n|^3/3}{x_n^2} + \frac{2/3|y_n|^{9/4}}{y_n^4} = |x_n|/3 + (2/3)|y_n|^{1/4} \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist f stetig, auch in $(0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ können wir $\partial_x f$ mit Hilfe der Quotientenregel berechnen und erhalten

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(x^2+y^4)y^3 - xy^3 2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{-x^2y^3+y^7}{(x^2+y^4)^2}.$$

---

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2016s/

Es ist $f(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Es gilt $\partial_x f(0, 1/n) = \frac{n^{-7}}{n^{-8}} = n \nrightarrow 0 = \partial_x f(0,0)$ für $n \to 0$. Also ist $\partial_x f$ nicht stetig in $(0,0)$.

c) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,-1,1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := z^3 + z^2 - 3xyz + x^4 + 2y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,-1,1) = 1 + 1 + 2(-1)^3 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2z - 3xy, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1) = 3 + 2 = 5 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\big(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 2g(x,y) - 3xy} \left(-3yg(x,y) + 4x^3 \quad - 3xg(x,y) + 6y^2\right). \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3: a) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte. Es ist

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix}$$

Also: $\nabla g(x,y) = (0,0)$ genau dann wenn $x^3 = y$ und $y^3 = x$. Insbesondere gilt dann $y^9 = y$, also $y \in \{(-1,0,1)\}$. Das führt auf die kritischen Punkte $p_1 = (-1,-1)$, $p_2 = (0,0)$ und $p_3 = (1,1)$. Wir bestimmen nun die zweite Ableitung (Hesse-Matrix) von g. Es ist $\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$. Damit $\nabla^2 g(p_1) = \nabla^2 g(p_3) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ und $\nabla^2 g(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit nach dem Hauptminoren-Kriterium ($\det(12) = 12 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 128 > 0$) und die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte sind 4 und -4). Insgesamt: g hat zwei lokale Extremstellen, nämlich p_1 und p_3 und es handelt sich dabei um lokale Minima (tatsächlich sogar global, war aber nicht gefragt).

b) Wir verwenden die Lagrange Multiplikatorregel. Wir suchen also das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$, wobei $g(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8$. Es ist $\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$, und da $g(0,0,0) \neq 0$, ist damit $\operatorname{Rang}(g'(x,y,z)) = 1$ für alle $(x,y,z) \in E$. Ist $\vec{p} = (x,y,z)$ der Punkt in E auf welchem das Maximum angenommen wird, so gilt also

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= \lambda 4x, \\ 2x + 2y + 2z &= \lambda 4y, \\ 2x + 2y + 2z &= \lambda 2z. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle: Ist $\lambda = 0$, so ist $x + y + z = 0$ und damit $f(x,y,z) = 0$. Ist $\lambda \neq 0$, so folgt $4x = 4y = 2z$, also $y = x$ und $z = 2x$. Also $\vec{p} = \begin{pmatrix} x & x & 2x \end{pmatrix}^T$. Die Bedingung $g(x,x,2x) = 0$

führt auf $2x^2+2x^2+4x^2=8$, also $x=\pm 1$. Das führt auf die zwei Punkte $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Es ist $f(\vec{p_1})=f(\vec{p_2})=16$. Also ist 16 der Maximalwert von f auf M und dieser wird in $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$ angenommen. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt (war nicht gefragt), dass 0 der Minimalwert ist und dieser auf allen Punkten in E angenommen wird, welche $x+y+z=0$ erfüllen.

Lösungen zu Aufgabe 4: a) Es ist $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\cosh y-\cosh y\\0-0\\\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, also besitzt $\vec{v}$ auf der konvexen Menge M ein Potential p. Dieses erfüllt $\partial_x p(x,y,z)=\ln(y)$, also $p(x,y,z)=x\ln(y)+g(y,z)$. Weiter ist $\partial_y p(x,y,z)=\frac{x}{y}+\partial_y g(y,z)=\frac{x}{y}+z\cosh y$, also $g(y,z)=z\sinh y+h(z)$. Schließlich ist $\partial_z p(x,y,z)=\sinh y+h'(z)=\sinh y$, also können wir $h=0$ wählen. Insgesamt:

$$p(x,y,z)=x\ln y+z\sinh y.$$

b) Die Menge M ist konvex, also insbesondere einfach zusammenhängend. Damit lässt sich das Kurvenintegral mit Hilfe des Potentials berechnen und es gilt

$$\int\limits_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}=p(\gamma(1))-p(\gamma(0))=p(1,2,0)-p(0,1,1)=\ln 2-\sinh 1.$$

c) Nach dem Integralsatz von Gauß iat

$$\iint\limits_F \vec{v}\cdot\vec{N}do=\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{v}\,d(x,y,z).$$

Es ist $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z)=-1+1+4z=4z$. Wir beschreiben V mittels Kugelkoordinaten

$$V=\{\begin{pmatrix}r\cos\phi\,\cos\vartheta\\r\sin\phi\,\cos\vartheta\\r\sin\vartheta\end{pmatrix}:\ 0\le r\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\vartheta\le\tfrac{\pi}{2}\}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{v}\,d(x,y,z)&=\iiint\limits_V 4z\,d(x,y,z)\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^{2\pi} r\sin\vartheta\,r^2\cos\vartheta\,d\phi\,dr\,d\vartheta\\&=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^3\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta\\&=8\pi\Big(\int_0^2 r^3\,dr\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\vartheta\Big)\\&=8\pi[r^4/4]_{r=0}^2[\sin^2(\vartheta)/2]_{\vartheta=0}^{\pi/2}=16\pi\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich das Integral auch (etwas umständlicher) direkt berechnen. Die Oberfläche ∂V von V setzt sich zusammen aus $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, wobei $\mathcal{F}_1$ die Kugelschalenhälfte und $\mathcal{F}_2$ die Grundkreisscheibe sind. Als Parametrisierungen nehmen wir

$$\mathcal{F}_1=\big\{\vec{g}_1(\phi,\vartheta):\ \phi\in[0,2\pi],\ \vartheta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\big\}\qquad\text{mit } \vec{g}_1(\phi,\vartheta):=2\begin{pmatrix}\cos\phi\,\cos\vartheta\\\sin\phi\,\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

(Kugelkoordinaten der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $r=2$) und

$$\mathcal{F}_2 = \big\{\vec{g}_2(r,\phi) : r \in [0,2],\, \phi \in [0,2\pi]\big\} \qquad \text{mit } \vec{g}_2(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Polarkoordinaten der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 2 in der xy-Ebene $z=0$). Setze

$$\vec{n}_1(\phi,\vartheta) := \partial_\phi \vec{g}_1(\phi,\vartheta) \times \partial_\vartheta \vec{g}_1(\phi,\vartheta) = 2\begin{pmatrix} -\sin\phi\,\cos\vartheta \\ \cos\phi\,\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} -\cos\phi\,\sin\vartheta \\ -\sin\phi\,\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \cos\phi\,\cos^2\vartheta \\ \sin\phi\,\cos^2\vartheta \\ \cos\vartheta\,\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Da die dritte Komponente von $\vec{n}_1(\phi,\vartheta)$ nichtnegativ ist, zeigt $\vec{n}_1(\phi,\vartheta)$ nach außen. (Achtung: $\vec{n}_1(\phi,\vartheta)$ ist nicht normiert!) Für den Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}_2$ nach außen ergibt sich

$$\vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\,do &= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \vec{v}(\vec{g}_1(\phi,\vartheta))\cdot\frac{\vec{n}_1(\phi,\vartheta)}{\|\vec{n}_1(\phi,\vartheta)\|}\,\|\vec{n}_1(\phi,\vartheta)\|\,d(\phi,\vartheta) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,(-2\cos\phi+4\sin\phi) \\ \cos\vartheta\,(2\sin\phi-5\cos\phi) \\ 8\sin^2\vartheta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4\cos\phi\,\cos^2\vartheta \\ 4\sin\phi\,\cos^2\vartheta \\ 4\cos\vartheta\,\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3\vartheta\big(2\sin^2\phi - 2\cos^2\phi - \cos\phi\sin\phi\big) + 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\phi = 2\pi[8\sin^4\vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = 16\pi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}_2\,do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{v}(\vec{g}_2(r,\phi))\cdot\vec{N}_2(\vec{g}_2(r,\phi))\,\|\partial_r\vec{g}_2(r,\phi)\times\partial_\phi\vec{g}_2(r,\phi)\|\,d(r,\phi) \\
&= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} r(\cos\phi+\sin\phi) \\ r(\sin\phi-\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,\|\partial_r\vec{g}_2(r,\phi)\times\partial_\phi\vec{g}_2(r,\phi)\|\,d(r,\phi) \\
&= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} 0\,\|\partial_r\vec{g}_2(r,\phi)\times\partial_\phi\vec{g}_2(r,\phi)\|\,d(r,\phi) = 0
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = \iint\limits_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\,do + \iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v}\cdot\vec{N}_2\,do = 16\,\pi.$$