

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Nachtrag zur Jordan-Normalform

Da in der Übung nicht ganz klar geworden ist, wie ich auf die Jordan-Normalform der 3×3 Matrizen gekommen bin, hier ein kleiner Nachtrag. Erinnerung: Ein Jordan-Block der Länge l zu dem Eigenwert λ ist gegeben durch

$$J_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Jordan-Normalform selbst ist dann eine Matrix welche aus Jordan-Blöcken ("in der Hauptdiagonale und sonst Nullen") besteht. Ein solcher Jordan-Block hat den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 (\vec{e}_1 ist einziger Eigenvektor) und algebraischer Vielfachheit l . Da jeder Jordan-Block nur zu einem eindimensionalen Eigenraum führt (geom. VFH = 1) ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ gleich der Anzahl von Jordan-Blöcken zu dem Eigenwert λ . Ein Jordan-Block der Länge l führt zu einer Differenz von $l - 1$ zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit. Beispiel dazu: Sei $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ mit nur einem Eigenwert λ . Die geometrische Vielfachheit von λ sei 3 und die algebraische Vielfachheit sei 5. Das heißt es gibt insgesamt 3 Jordan-Blöcke mit Längen l_1, l_2, l_3 (Ohne Einschränkung $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ da man Jordan-Blöcke in beliebiger Reihenfolge anordnen kann) und es gilt $l_1 + l_2 + l_3 = 5$. Das heißt es gibt nur folgende Möglichkeiten: $l_1 = l_2 = 1$ und $l_3 = 3$ oder $l_1 = 1$ und $l_2 = l_3 = 2$. Also ist A ähnlich zu einer der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$