Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Erinnerung: Eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^d$ ist offen, wenn man um jeden Punkt $x \in O$ eine (kleine) Kugel mit Zentrum in x legen kann, welche ganz in O liegt. Offene Mengen sind interessant, wenn man Eigenschaften betrachtet, wo man sich von allen Seiten an den Punkt annähern möchte, z.B. bei der Definition von Differenzierbarkeit. Oder wenn man Eigenschaften in einer lokalen Umgebung haben möchte (z.b. Umkehrsatz, implizit definierte Funktion). Typischerweise sind Mengen offen, wenn in der Charakterisierung nur $<, >$ auftauchen, z.B.

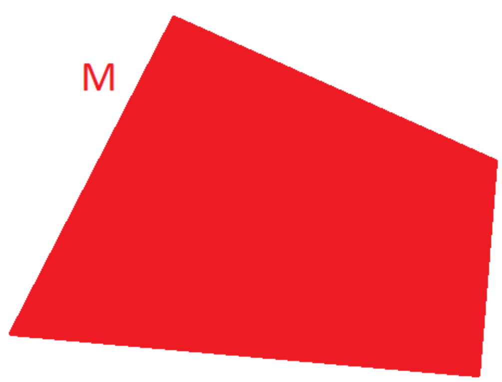
$$O_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^4 < 100, z > 3\}$$
$$O_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 < y^3 + e^x\}$$

Eine abgeschlossene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Menge, in welcher alle Grenzwerte von Folgen die in M verlaufen, wieder in M liegen. Anschaulich kann man sich das so vorstellen, dass der Rand zu der Menge M dazugehört. Typischerweise sind Mengen abgeschlossen, wenn in der Charakterisierung nur $\leq, \geq$ und $=$ auftauchen, z.B.

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^4 = 100, z \geq 3\}$$
$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y^3 + e^x\}$$

Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Menge, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist. Kompakte Mengen sind wichtig, denn auf diesen nehmen stetige Funktionen ihr Maximum und Minimum an. M_1 ist kompakt, M_2 nicht.

Beispiel:



Menge M ist offen, wenn der Rand nicht dazugehört. Gehört der Rand dazu, ist M abgeschlossen und sogar kompakt, da beschränkt.