

## Höhere Mathematik II

### für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Tipps zur Vermeidung von Rechenfehlern bei der Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

Bei der Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe des charakteristischen Polynoms kommt es schnell mal zu Rechenfehlern. Hier soll es darum gehen, wie man diese frühzeitig erkennen kann und sich am Ende sicher sein kann, dass die Lösung stimmt.

Wir fassen noch einmal kurz die wesentlichen Schritte zur Berechnung der Eigenwerte zusammen. Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  die Matrix, von der wir die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen möchten.

1) Berechnung des charakteristischen Polynoms  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ .

2) Suchen von Nullstellen von  $p_A$ . Beachte, dass aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra das Polynom  $p_A$  in Linearfaktoren zerfällt. Oder anders gesagt: Das Polynom hat  $n$  Nullstellen (wobei mehrfache Nullstellen auch mehrfach gezählt werden). Das führt auf die Darstellung

$$p_A = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{m_k},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die Eigenwerte von  $A$  sind und  $m_1, \dots, m_k$  die (algebraischen!) Vielfachheiten der Nullstellen. Wenn man in Schritt 1) günstige Entwicklungsmöglichkeiten findet, hat man eventuell schon dort die Linearfaktorzerlegung (zumindest teilweise) von  $p_A$  gefunden. Dann entfällt dieser Schritt natürlich.

3) Berechne  $\text{Kern}(A - \lambda_i I_n)$  für  $i = 1, \dots, k$  mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (und -1 Trick) und erhalte damit alle Eigenräume.

Nun gibt es folgende Tricks um sicher zu gehen, dass man sich nicht verrechnet hat, wobei der zweite der eindeutig interessantere ist!

#### Probe der Eigenvektoren:

Hat man in Schritt 3) einen Eigenvektor  $v$  berechnet, so ist ein einfaches Mittel zur Prüfung der Korrektheit der Probe. Man testet also einfach ob  $Av = \lambda_i v$  tatsächlich gilt. Hierbei genügt in der Regel die Überprüfung an ein bis zwei Komponenten (zumindest, wenn man unter Zeitdruck steht, sicherer ist es natürlich alle Komponenten zu testen).

Beispiel: Wir haben die Matrix  $A$  aus Aufgabe 4 des zweiten Übungsblattes, also

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass wir alle Schritte durchgeführt haben und haben als Eigenvektoren zu dem Eigenwert 4 folgende drei linear unabhängige Vektoren gefunden.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun überprüft man, ob  $Av_i = 4v_i$  gilt, z.B.  $(Av_1)_1 = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -4 = 4 \cdot (-1) = 4v_1$ . Wie oben erwähnt, kann man auch noch die anderen Komponenten testen, wenn man absolute Sicherheit möchte.

Im Spezialfall, dass  $A$  reell und symmetrisch ist (was hier der Fall ist), kann man auch überprüfen, ob die Eigenvektoren zu **verschiedenen** Eigenwerten orthogonal sind (Erklärung dazu kommt erst noch in der Vorlesung). Das genügt dann ebenfalls als ausreichende Prüfung.

In der Praxis kommt es aber oft vor, dass man sich bereits bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms verrechnet und damit keine Nullstellen oder falsche Nullstellen findet. Rechnet man dann mit den falschen Nullstellen weiter, findet man keine Eigenvektoren, denn man erhält bei dem Gauß-Algorithmus in diesem Fall die Einheitsmatrix. Dann wiederum weiß man nicht, an welcher Stelle man sich verrechnet hat (bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms oder beim Verwenden des Gauß-Algorithmus). Doch es gibt einen (ziemlich sicheren) Test, der prüft, ob das charakteristische Polynom/die Eigenwerte richtig berechnet sind. Hier werden wir zwei Fälle unterscheiden.

### Die Spurprobe, falls die Linearfaktoren von $p_A$ schon berechnet sind:

Erinnerung: Die Spur einer Matrix  $A$  ist gerade die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen, oben ist sie z.B.  $3+3+3+3 = 12$ . Nun gilt folgendes: Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die Nullstellen von  $p_A$  mit (algebraischen) Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_k$  so gilt

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot m_i.$$

Im Spezialfall, dass  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte hat, ist die Spur also einfach die Summe der Eigenwerte. Die Überprüfung, ob obige Gleichheit gilt, ist die Spurprobe. Diese sollte man durchführen **bevor** man die Eigenräume bestimmt. Beispiele: In Aufgabe 1 auf Blatt 2 haben wir die Eigenwerte  $-2, 1$  und  $3$  gefunden. Da die Matrix auch nur eine  $3 \times 3$ -Matrix ist, sind alle Eigenwerte einfach, d.h.  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  (Polynom dritten Grades hat 3 Nullstellen). Wir prüfen

$$\text{Spur}(A) = 0 + 1 + 1 = 2, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = -2 + 1 + 3 = 2$$

die Spurprobe ist also bestanden. Hätten wir uns verrechnet, wäre die Spurprobe ziemlich sicher falsch gewesen. In diesem Fall hätten wir unsere Rechnung prüfen müssen und den Fehler suchen. Da die Spurprobe bestanden ist, kann dann mit der Berechnung der Eigenräume fortgesetzt werden. Betrachten wir wieder die Matrix von oben. Dort gibt es den Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  mit Vielfachheit  $m_1 = 1$  und den Eigenwert  $\lambda_2 = 4$  mit Vielfachheit  $m_2 = 3$ . Wir machen wieder die Spurprobe:

$$\text{Spur}(A) = 3 + 3 + 3 + 3 = 12, \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i \cdot m_i = 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 12$$

### Die Spurprobe, falls die Linearfaktorzerlegung von $p_A$ noch nicht bekannt ist:

Wir nehmen an, dass wir das charakteristische Polynom in der Form

$$p_A = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

vorliegen haben. In diesem Fall können wir bevor wir uns auf die Nullstellensuche machen, prüfen ob

$$\text{Spur}(A) = (-1)^{n-1} a_{n-1}$$

gilt. Ist das nicht der Fall, so haben wir uns verrechnet und müssen den Fehler suchen. Anschließend bestimmt man die Nullstellen des Polynoms. Falls das Polynom ganzzahlig ist, testet man wie üblich die (positiven und negativen) Teiler des konstanten Glieds. Im Anschluß kann man noch einmal die Spurprobe machen. Außerdem hat man in diesem Fall noch eine Testmöglichkeit. Es gilt nämlich

$$a_0 = \det(A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}.$$

Beispiel wir berechne in Aufgabe 1 das charakteristische Polynom mit der Regel von Sarrus und erhalten

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

Die Spurprobe sagt  $a_2 = 2 = \text{Spur}(A)$  und wir setzen der Berechnung der Nullstellen fort. Testen der Teiler von  $-6$  liefert eine Nullstelle, und nach Polynomdivision findet man auch die anderen beiden Nullstellen. Am Ende hat man wieder  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$  und  $\lambda_3 = 3$  gefunden. Jetzt kann man wieder die Spurprobe durchführen und außerdem kann man hier noch folgenden Test durchführen:

$$\det(A) = a_0 = -6, \quad \prod_{i=1}^3 \lambda_i^{m_i} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$$

Dieser Test ist also auch bestanden, und man kann mit der Berechnung der Eigenräume fortsetzen.

Hintergrund der ganzen Sache ist die Invarianz der Spur und der Determinante unter Ähnlichkeitstransformationen.