

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 4 Punkte)

- a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A . Bestimmen Sie eine Orthogonale Matrix S , so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.
- b) Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - y^2$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion und ihre Art (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

- a) Mit Hilfe der Multiplikationsregel von Lagrange bestimmen Sie den größten Flächeninhalt eines Rechtecks, das in der Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$ liegt und Seiten parallel zu den x, y -Achsen hat.
- b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Zeigen Sie, dass g stetig in $(0, 0)$ ist aber nicht differenzierbar in $(0, 0)$.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + y \\ 2y + x \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass \vec{w} ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Sei $T(t, x) = -t^3x^3 + 6x^2t^2 + 10xt + 10$ die Temperatur T als Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und des Ortes $x \in \mathbb{R}$. Wenn $t = 1$, ist ein Käfer in $x = 1$ ganz glücklich mit der Temperatur von 25 Grad ($T(1, 1) = 25$) und er möchte die Temperatur beibehalten. Hat der Käfer die Möglichkeit für t nah bei 1 die Temperatur zu beibehalten? Wann ja, mit welcher Geschwindigkeit soll er anfangen sich zu bewegen?

c) Wir betrachten das Integral

$$\int_1^e \int_{\ln(y)}^1 e^{e^x - x} dx dy.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

Aufgabe 4 (4 + 6 Punkte)

a) Sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y + 5, x^2 + y^2 \leq 4\}$ und wir betrachten das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^3 e^{yz^3} \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds durch

D , das heißt das Integral $\iint_D \vec{w} \cdot \vec{N} d\sigma$, wobei \vec{N} der Normaleneinheitsvektor ist, der nach oben zeigt.

b) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v} : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > -1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + (1 + z)^y \\ -y \\ z + e^{e^x} \end{pmatrix}$. Die Oberfläche von

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$$

wird mit ∂B bezeichnet. Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Ausfluss von \vec{v} durch ∂B , das heißt das Integral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma$, wobei \vec{N} der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Bereichs zeigt.