Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Sommersemester 2017

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Innerhalb der Veranstaltung *Höhere Mathematik II für die Fachrichtung elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen* wird der Teil zu *Höhere Mathematik II* jeweils in den Vorlesungen am Dienstag und Donnerstag behandelt.

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

0 Determinanten und Kreuzprodukt

Bemerkung: Das Kapitel 0 wurde in der HM1 beigebracht. Trotzdem steht hier auf dem Skript, weil es wichtig fr die anderen Kapitel ist

0.1. Definierende Eigenschaften der Determinante: Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$,

(D2) für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha\vec{a}_j + \beta\vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\ = \; & \alpha\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \beta\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n), \end{aligned}$$

(D3) Wenn wir zwei Spalten vertauschen, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Bemerkung: Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante $\det$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Man kann auch die definierenden Eigenschaften mit Hilfe der Zeilen anstatt der Spalten definieren.

(D1) bedeutet eine (naheliegende) Normierung. (D2) bedeutet, dass die Determinante in jeder Spalte linear ist.

Schreibweise: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden $\det$ meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

0.2. Folgerungen: (a) Ist eine Spalte $= 0$, so ist auch die Determinante $= 0$.

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Hat die Matrix zwei gleiche Spalten, dann hat sie Determinante Null.

(d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ linear abhängig (dh gilt Rang $A < n$), so ist $\det(A) = 0$.

(e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

Alle obige Folgerungen gelten wenn Spalten durch Zeilen ersetzt werden.

Erinnerung: Eine Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, falls sie invertierbar ist, bzw. falls die zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$ bijektiv (oder injektiv oder surjektiv) ist

(vgl. 14.21 in HM I).
Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder die Maximalzahl linear unabhängigier Zeilen).

Beweis. (a) folgt sofort aus (D2). (b) folgt leicht aus (D2) und (D3).
zu (c): Wegen (b) und (D2) ist

$$\begin{aligned}
& \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
= \; & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
= \; & -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).
\end{aligned}$$

zu (d): Es sei etwa die letzte Spalte Linearkombination der anderen Spalten. Wegen (D2) und (D3) gilt dann:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_j) = 0.$$

Wegen (d) muss man bei (e) nur noch zeigen: Rang $A = n$ impliziert $\det(A) \neq 0$. Dazu bringen wir A durch elementare Spaltenumformungen (analog zu Zeilenumformungen, nur für Spalten statt für Zeilen) auf die Gestalt der Einheitsmatrix I_n. Dabei wird nach (D2) (für $\vec{b}_j = 0$) und (b) und (c) $\det(A)$ nur mit Zahlen $\neq 0$ multipliziert. Wegen (D1) ist schließlich $\det(I_n) = 1 \neq 0$. $\square$

0.3. Der Fall $n = 2$: Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

denn die Eigenschaften (D1) und (D3) sind klar, und (D2) ist leicht.

Beispiele: (1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3)(-4) = 0$, die Matrix ist nicht regulär.

(2) $\begin{vmatrix} i & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = i \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 = -i$, die Matrix ist regulär.

0.4. Der Fall $n = 3$: Es gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = avz + bwx + cuy - awy - buz - cvx.$$

(D1) ist klar, (D2) ist leicht. (D3) braucht eine Fallunterscheidung, die wir unten im allgemeinen Fall durchführen.

Die Regel von Sarrus gilt für $n = 3$, **aber nicht für** $n \geq 4$**!**

Schema:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & a & b & c & & & \\
 & & w & u & v & w & u & & \\
 & y & z & x & y & z & x & y & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\
- & - & - & & & & + & + & +
\end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 \cdot 5 - 0 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 5 = 6.$$

0.5. Der allgemeine Fall: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Einträgen a_{jk}. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $A_{1k} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der ersten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Man hat die folgende Formel, die das Berechnen von $\det(A)$ auf das Berechnen der Determinanten kleinerer Matrizen zurückführt:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$$

Für $n = 3$ steht hier gerade die Formel aus 0.4, für $n = 2$ diejenige aus 0.3.

Beweis. (D1) ist klar, und (D2) ist nicht so schwer. Zum Beweis von (D3) seien zwei Spalten von A gleich, etwa die k_0-te und die k_1-te, wobei $k_0 < k_1$. In der Summe verschwindet dann $\det(A_{1k})$ für alle $k \notin \{k_0, k_1\}$, da in diesen A_{1k} zwei Spalten gleich sind (weder die k_0-te noch die k_1-te sind gestrichen worden). Also ist

$$\det(A) = (-1)^{k_0+1} a_{1k_0} \det(A_{1k_0}) + (-1)^{k_1+1} a_{1k_1} \det(A_{1k_1}).$$

Hierbei ist $a_{1k_0} = a_{1k_1}$ nach Voraussetzung. Wir erhalten A_{1k_1} aus A_{1k_0}, indem wir durch sukzessives Vertauschen benachbarter Spalten die $k_1 - 1$-te Spalte (von A_{1k_0}) an die k_0-te Stelle bringen. Dazu brauchen wir $k_1 - 1 - k_0 = k_1 - k_0 - 1$ Vertauschungen. Also ist

$$\det(A_{1k_1}) = (-1)^{k_1-k_0-1} \det(A_{1k_0}).$$

$\square$

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ von der Form $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix}$, also eine <u>untere Dreiecksmatrix</u>, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$.

0.6. Determinantenentwicklungssatz: Die Formel in 0.5 nennt man <u>Entwicklung von $\det(A)$ nach der ersten Zeile von $A = (a_{jk})_{jk}$</u>. Mit denselben Argumenten kann man $\det(A)$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Beispiel: Man entwickelt möglichst nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, hier z.B. nach der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3 \cdot 6) = -8.$$

0.7. Determinantenmultiplikationssatz: Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(ohne Beweis).

Insbesondere gilt für eine reguläre Matrix A: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Interpretation: Die Matrix B habe die Spalten $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$. Der von diesen Spalten aufgespannte Spat hat das Volumen $\det(B)$. Dieser Spat wird von der zur Matrix A gehörenden linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ auf den von den Spalten $A\vec{b}_1, \ldots, A\vec{b}_n$ der Matrix AB aufgespannten Spat mit Volumen $\det(AB)$ abgebildet.
Bildet man also mit der zur Matrix A gehörenden Abbildung einen beliebigen Spat ab, **so muss man dessen Volumen mit** $\det(A)$ **multiplizieren**.

0.8. Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ sei und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ habe. Wenn die Matrix A regulär ist, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, wobei für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)/\det(A).$$

Zur Berechnung der j-ten Komponente x_j der Lösung muss man also die j-te Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzen, die Determinante berechnen und durch die Determinante von A dividieren.

Beweis. Wir haben $\vec{b} = \sum_{l=1}^{n} x_l \vec{a}_l$, also ist wegen (D2):

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{l=1}^{n} x_l \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_l}_{j}, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wegen (D3) bleibt rechts nur der Summand für $l = j$ stehen, dh $x_j \det(A)$. □

0.9. Eine Formel für die inverse Matrix: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär mit Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Geht man zur Berechnung von A^{-1} wie in 14.20 (HM I) vor und verwendet die Cramersche Regel 0.8, so erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Big(\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{e}_k}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)\Big)_{j,k=1}^{n}.$$

Die Formel für $n = 2$ in 14.21 (HM I) ist ein Spezialfall.

0.10. Orientierung: Die Idee in 0.1 war, dass $\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ das Volumen des von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spates beschreibt. Wegen (D2) (und (D1)) nimmt det auch negative Werte an. Das eigentliche Volumen ist $|\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)|$. Aber auch das Vorzeichen von $\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ trägt Information.

Zwischenspiel: Ist V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so kann man φ eine Determinante $\det\varphi$ zuordnen, indem man eine Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ von V wählt, die Abbildung φ bzgl. dieser Basis durch eine Matrix A darstellt und $\det\varphi := \det(A)$ setzt.

Ist nämlich $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ eine weitere Basis von V, so erhalten wir die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bzgl. dieser Basis als $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, wobei S die Darstellungsmatrix der Identität $V \to V$ ist, wenn man "vorne" die Basis $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und "hinten" die Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ nimmt. Wegen 0.7 ist dann

$$\det(\widetilde{A}) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A) = \det\varphi,$$

dh die Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition: Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt orientierungstreu, falls $\det \varphi > 0$ ist.

Eine geordnete Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von $\mathbb{R}^3$ heißt Rechtssystem, falls $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) > 0$ ist. Meist ist dabei $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ eine Orthonormalbasis.

Satz: Ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ orientierungstreu, so ist auch $\varphi(\vec{b}_1), \varphi(\vec{b}_2), \varphi(\vec{b}_3)$ ein Rechtssystem.

Beispiel: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist ein Rechtssystem, $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2$ ist kein Rechtssystem.

0.11. Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im $\mathbb{R}^3$: Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

(0) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

(1) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

(2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$ und $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y},$$

dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig sind.

Anwendung Lorentzkraft: Eine in einem Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte elektrische Ladung q erfährt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

und wird dadurch abgelenkt (zB $\to$ Elektromotor). Das durch $\vec{v}$ und $\vec{B}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $\|\vec{v}\|\|\vec{B}\||\sin\varphi|$, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ ist. Die größte Kraft wirkt somit, wenn $\vec{v}$ und $\vec{B}$ senkrecht sind. Sind hingegen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ parallel, so ist $\vec{F} = \vec{0}$ und es wirkt keine Kraft.

Berechnung: Man berechnet $\vec{x} \times \vec{y}$ formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Begründung: Bezeichnet man die rechte Seite mit $\vec{z}$, so sieht man leicht $(\vec{z}|\vec{x}) = \det(\vec{x},\vec{x},\vec{y}) = 0$ und $(\vec{z}|\vec{y}) = \det(\vec{y},\vec{x},\vec{y}) = 0$ ein. Außerdem ist

$$\det(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \det(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \|\vec{z}\|^2 \geq 0.$$

Der Flächeninhalt a des von $\vec{x},\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $a = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\||\sin\varphi|$, wobei φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel ist. Wegen $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\varphi$ erhalten wir

$$a^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\Big(1-\cos^2\varphi\Big) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2.$$

Nun rechnet man nach, dass

$$\|\vec{z}\|^2 + (\vec{x}|\vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

gilt (zur Übung empfohlen).

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{x}\times\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 - 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-1) - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 - (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}.$$

Warnung: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ! So ist zB

$$(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_2) = \vec{e}_1\times\vec{0} = \vec{0}.$$

0.12. Das Spatprodukt: Für $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$ heißt $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = (\vec{x}\times\vec{y}|\vec{z})$ das <u>Spatprodukt</u> von $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

Satz: Es gilt $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = \det(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Beweis. Man weist für die linke Seite die Eigenschaften (D1)–(D2) der Determinante nach, und dazu die Folgerung (c). Es reicht zu beobachten dass (D2) und (c) implizieren (D3). □

Beispiel: $\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2 = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = \det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y})$ (vgl. die Begründung oben). Anschaulich ist das auch klar, da $\det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y})$ das Volumen des aufgespannten Spates ist, welches man wegen der Orthogonalität von $\vec{x}\times\vec{y}$ auf dem durch $\vec{x},\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramm als Produkt von $\|\vec{x}\times\vec{y}\|$ mit der Parallelogrammfläche erhält.

Sind $\vec{x},\vec{y}$ linear unabhängig, so ist $\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und zwar ein Rechtssystem.

Eine Basis $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ von $\mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Rechtssystem, wenn $\vec{z}$ auf derselben Seite der durch $\vec{x},\vec{y}$ aufgespannten Ebene liegt wie $\vec{x}\times\vec{y}$.

1 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen

1.1 Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt <u>Eigenwert</u> von A, falls es ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Jedes solche $\vec{x}$ heißt <u>Eigenvektor zum Eigenwert λ</u> (von A).
Der <u>Eigenraum von A zum Eigenwert λ</u> ist

$$E_A(\lambda) := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Er besteht aus $\vec{0}$ und allen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ.

Beachte: $\vec{0}$ ist kein Eigenvektor!

Beispiele: (1) 1 ist der einzige Eigenwert von I_n.

(2) Die Diagonalelemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$ einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ sind Eigenwerte von D. Für $j = 1, \ldots, n$ ist der j-te Einheitsvektor $\vec{e}_j$ ein Eigenvektor zum Eigenwert d_j.

(3) Die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert i mit Eigenvektor $\binom{i}{1}$.

Wir betrachten von nun an komplexe Matrizen.

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt: Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$ ist. In diesem Fall ist $E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_n)$.

1.2 Charakteristisches Polynom

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Das <u>charakteristische Polynom χ_A von A</u> ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom vom Grad n.

Satz Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Nullstelle von p_A ist (vgl 0.2(e) und Bemerkung in 1.1).

Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Dann

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Die Nullstellen des Charakteristisches Polynomes sind 0 und 5 und deshalb sind 0 und 5 die Eigenwerte von A.

1.3 Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen <u>ähnlich</u> , falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.

Bemerkung: (a) Es gilt dann $A = SBS^{-1}$, denn

$$SBS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} A \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} = A,$$

dh auch B, A sind ähnlich.

(b) Sind A, B ähnlich und B, C ähnlich, so sind auch A, C ähnlich, denn $B = S^{-1}AS$ und $C = R^{-1}BR$ implizieren

$$C = R^{-1}S^{-1}ASR = (SR)^{-1}A(SR)$$

und mit S und R invertierbar ist auch SR invertierbar.

(c) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante und dasselbe charakteristische Polynom. Ferner die zugehörigen Eigenräume haben dieselbe Dimension. Ist nämlich $B = S^{-1}AS$, so gilt

$$\det(B) = (\det(S))^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A)$$

und

$$p_B(\lambda) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda).$$

Also sind die charakteristische Polynome gleich.

Weiter gilt für jeden Eigenwert λ von A:

$$\begin{aligned} E_A(\lambda) &= \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : S^{-1}A\vec{x} = \lambda S^{-1}\vec{x}\} \\ &= S(\{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : \underbrace{S^{-1}AS}_{B}\vec{y} = \lambda\vec{y}\}) = S(E_B(\lambda)), \end{aligned}$$

wobei wir $\vec{x} = S\vec{y}$ geschrieben haben. Umgekehrt gilt $E_B(\lambda) = S^{-1}(E_A(\lambda))$. Da S invertierbar ist, haben $E_A(\lambda)$ und $E_B(\lambda)$ dieselbe Dimension.

Skizze:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n & \\ S & \uparrow & & \downarrow & S^{-1} \\ & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{C}^n & \end{array}$$

Man kann die Skizze so interpretieren, dass die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ in der durch die Spalten der regulären Matrix S gegebenen Basis durch die Matrix B dargestellt wird.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Es gilt $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}AS = B$. Also sind A, B ähnlich.

<u>Anwendung</u>: Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) + y(t), \\ y'(t) &= x(t) + 3y(t). \end{aligned}$$

Setzt man $\binom{u(t)}{v(t)} := S^{-1}\binom{x(t)}{y(t)}$, so erhält man

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{S^{-1}AS}_{=B}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

also das entkoppelte System $u'(t) = 4u(t)$, $v'(t) = 2v(t)$, welches sich leicht lösen lässt: $u(t) = ae^{4t}$, $v(t) = be^{2t}$. Die Lösungen des ursprünglichen Systems erhält man dann durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{2t} \\ ae^{4t} - be^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutige Lösung zum Anfangswert $\binom{x(0)}{y(0)} = \binom{1}{0}$ ist wegen $\binom{a+b}{a-b} = \binom{1}{0} \iff a = b = 1/2$ also gegeben durch $x(t) = (e^{4t} + e^{2t})/2$, $y(t) = (e^{4t} - e^{2t})/2$ für $t \in \mathbb{R}$.

1.4 Diagonalisierung von Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, dh falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so gibt, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel: Nach dem Beispiel in 1.3 ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar.

Satz: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn A n unabhängige Eigenvektoren hat, dh $\mathbb{C}^n$ hat eine Basis aus Eigenvektoren von A.

Eine entsprechende Matrix S erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Vektoren als Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ in eine Matrix S. Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{s}_j$, so erhält man $AS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1\vec{s}_1, \lambda_2\vec{s}_2, \ldots, \lambda_n\vec{s}_n$). Die Matrix S ist invertierbar und es ist $S^{-1}AS = D$.

Beispiel: Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2,$$

also sind 4 und 1 Eigenwerte der Matrix. Für die Eigenräume gilt

$$E_A(4) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Algebraische/ geometrische Vielfachheit und Kriterium für diagonalisierbarkeit

Definition: Die <u>algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes λ von A</u> ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_A. Zu jedem Eigenwert λ von A ist $E_A(\lambda)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ mit $m := \dim(E_A(\lambda)) \geq 1$. Die Zahl m heißt <u>geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ</u> .

Beispiele: (1) Der Eigenwert 1 von I_n hat algebraische und geometrische Vielfachheit n: Es ist $E_{I_n}(1) = \mathbb{C}^n$ und $p_{I_n}(\lambda) = \det(I_n - \lambda I_n) = (1 - \lambda)^n$.

(2) In Beispiel 1.5 haben i und $-i$ jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Es ist $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$.

(3) Der Eigenwert 1 der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1: Es gilt $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = (\lambda - 1)^2$ und $E_A(1) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{\binom{1}{0}\}$.

Beispiel: Die Matrix A aus Beispiel 1.1(3) hat genau die Eigenwerte $i, -i$ und es gilt $E_A(i) = \operatorname{lin}\{\binom{i}{1}\}$, $E_A(-i) = \operatorname{lin}\{\binom{i}{-1}\}$. Die geometrische Vielfachheit von i und $-i$ ist also jeweils 1.

Satz: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A, so gilt $k \leq n$ und

$$\dim(E_A(\lambda_1)) + \dim(E_A(\lambda_2)) + \ldots + \dim(E_A(\lambda_k)) \leq n,$$

dh **die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist höchstens n.**

Beweis. (b) folgt aus (a). (a) zeigt man durch Induktion nach der Anzahl k verschiedener Eigenwerte. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ verschiedene Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{k+1}$. Zum Beweis von deren Unabhängigkeit seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{0}$. Durch Multiplikation mit A bzw. mit λ_{k+1} folgt

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j A \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_{k+1} \vec{x}_j.$$

Durch Differenzbildung erhalten wir

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$ für $j = 1, \ldots, k$, also $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \ldots, k$ wegen $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$. Schließlich folgt auch $\alpha_{k+1} = 0$ wegen $\vec{x}_{k+1} \neq 0$. $\square$

Bemerkung: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist immer $\leq$ seiner algebraischen Vielfachheit.

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten, so gilt $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Bemerkung: Folgende Eigenschaften sind ebenfalls äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) Für jeden Eigenwert von A geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

(b) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist n.

Folgerung: Hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar (dann ist nämlich für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit $= 1$).

Bemerkung: Wenn die Matrix diaganalisierbar ist dann auf der Diagonalen von D müssen dann die Eigenwerte von A stehen, gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit wiederholt. Ist nämlich $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, so ist jedes $d \in \{d_j : j = 1, \dots, n\}$ ein Eigenwert von D mit algebraischer Vielfachheit $=$ Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $d_j = d$. Der Eigenraum zu d ist

$$E_D(d) = \operatorname{Kern}(D - dI) = \operatorname{lin}\{\vec{e}_j : j \in \{1, \dots, n\}, d_j = d\},$$

insbesondere stimmt die geometrische Vielfachheit von d mit der algebraischen Vielfachheit überein.

1.6 Symmetrische und hermitesche Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch . Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = A^*$ heißt hermitesch oder selbstadjungiert .

Zur erinnerung aus der HM1: A^T (Transponierte Matrix) ist die Matrix deren j-te Zeile die j-te Spalte von A ist. z.B. Wenn $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dann $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Also ist eine Matrix symmetrisch wenn ihre j-te Zeile gleich wie ihre j-te Spalte ist. Noch leichter, wenn eine "Reflektion" bezüglich der Diagonale die Matrix nicht ändert.

A^* (adjungierte Matrix) ist die Matrix definiert durch $A^* = \overline{(A^T)}$, z.B. wenn $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+2i & 3 \\ 4-i & 5-3i & 6 \end{pmatrix}$ dann $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 4+i \\ 2-2i & 5+3i \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (jedes Element der komplex transponierten Matrix wird komplex konjugiert). Für prezise Definitionen siehe HM1 Zusammenfassung Kapitel 14.5.

Beispiele: Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$ ist hermitesch.

Satz: (a) Eine hermitesche Matrix A hat nur reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

(b) Jede hermitesche Matrix A läßt sich diagonalisieren, wobei die Matrix S unitär, dh mit $S^* = S^{-1}$, gewählt werden kann. Für reelle symmetrische Matrizen kann $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal gewählt werden, dh mit $S^T = S^{-1}$ gewählt werden (ohne Beweis).

Beweis. zu (a): Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(A\vec{x}|\vec{x}) = (\vec{x}|A^*\vec{x}) = (\vec{x}|A\vec{x}) = \overline{(A\vec{x}|\vec{x})}, \text{ dh } (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}.$$

Sei λ ein Eigenwert von A und $\vec{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda\|\vec{x}\|^2 = (\lambda\vec{x}|\vec{x}) = (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}, \text{ also } \lambda = \frac{(A\vec{x}|\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert mit Eigenvektor $\vec{y}$, so gilt

$$\lambda(\vec{x}|\vec{y}) = (\lambda\vec{x}|\vec{y}) = (A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\mu\vec{y}) = \mu(\vec{x}|\vec{y}),$$

also $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$ wegen $\lambda \neq \mu$. $\square$

Beispiele: Die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ lässt sich durch die orthogonale Matrix $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren (siehe 1.3).

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus dem Beispiel in 1.4 ist symmetrisch, die dort angegebene Matrix S ist nicht orthogonal. Hier reicht es nicht, die gefundenen Eigenvektoren auf Länge 1 zu bringen, da die beiden Eigenvektoren zum Eigenwert 4 nicht orthogonal sind. Wir können aber das Gram-Schmidt-Verfahren verwenden und setzen

$$\vec{s}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{s}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \Bigl(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigm| \vec{s}_2\Bigr)\vec{s}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{s}_3 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix mit den Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ ist orthogonal und diagonalisiert A.

1.7 Definitheit reeller symmetrischer Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

A heißt positiv definit , falls $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

A heißt negativ definit , falls $\vec{x}^T A\vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

A heißt positiv semidefinit, falls für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0$.

A heißt negativ semidefinit, falls für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x}^T A\vec{x} \leq 0$.

A heißt indefinit , falls es $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$ und $\vec{y}^T A\vec{y} < 0$.

Bemerkung: Ist $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt

$$\vec{x}^T A\vec{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{x}^T A\vec{x} = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0,$$

wenn $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Also ist A positiv definit.

Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{x}^T A\vec{x} = -x_1^2 \leq 0,$$

aber nicht immer < 0, weil zum Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Also ist A negativ semidefinit.

Satz (Kriterium für positive definitheit mit Eigenwerten): Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt:

A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda \geq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist indefinit genau dann, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (gemäß algebraischer Vielfachheit wiederholt). Diagonalisiere A mit einer orthogonalen Matrix S: $S^T AS = D$, wobei D die Spalten

$\lambda_1\vec{e}_1,\ldots,\lambda_n\vec{e}_n$ hat. Schreibe $\vec{x}=S\vec{y}$, wobei $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$. Dann ist $\vec{x}=\vec{0}$ äquivalent zu $\vec{y}=\vec{0}$ und

$$\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{y}^TS^TAS\vec{y}=\vec{y}^TD\vec{y}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j^2.$$

□

Beispiel: Die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ sind 2 und 4. Da sie beide positiv sind ist die Matrix positiv definit.

Folgerung: Sei $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ symmetrisch. Dann ist A indefinit genau dann, wenn $\det(A)<0$ ist.

A ist positiv definit genau dann, wenn $\det(A)>0$ und $a>0$ ist.

A ist negativ definit genau dann, wenn $\det(A)>0$ und $a<0$ ist.

Beispiele: Die Matrix $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ist indefinit. Die Matrix $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ ist positiv definit. Die Matrix $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ ist negativ definit.

Für größere Matrizen kann man das folgende verwenden:

Kriterium von Hurwitz: Eine symmetrische Matrix $A=(a_{jk})_{jk}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle Hauptunterdeterminanten positiv sind, dh wenn

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\ldots&a_{mm}\end{vmatrix}>0$$

für alle $m=1,2,\ldots,n$ gilt.

Beispiel: Die Matrix $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ ist positiv definit. Das kann man mit dem Kriterium von Hurwitz überprüfen da $3>0$, $\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5>0$ und

$$\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=8>0.$$

Achtung: Es ist falsch zu sagen, dass wenn alle Hauptunterdeterminanten negativ sind dann ist die Matric negativ definit.

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir schreiben Vektoren $\vec{x}$ im $\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ oder als Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Für $n = 2, 3$ schreiben wir häufig $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2.1 Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent falls alle komponenten der Folge konvergent sind. In diesem Fall ist der Limes der Vektor dessen Komponenten die zugehörigen Grenzwerte sind.

Beispiel: Sei $\vec{x}_k := \begin{pmatrix} e^{-k} \\ 1 - 1/k \end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\vec{x}_k \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $k \to \infty$.

2.2 Offene abgeschlossene und wegzusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}^n$

Ist $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$, so heißt

$$K(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

offene Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius r .

Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen , falls es zu jedem $\vec{x}_0 \in Q$ ein (von $\vec{x}_0$ abhängiges) $r > 0$ gibt mit $K(\vec{x}_0, r) \subseteq Q$.

Beispiele: $\mathbb{R}^n$ ist offen. Offene Kugeln sind offen. Der Würfel $(0, 1)^n$ ist offen.

Beweis. Wir zeigen, dass $K(\vec{y}_0, s)$ offen ist. Dazu sei $\vec{x}_0 \in K(\vec{y}_0, s)$, dh $\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < s$. Wir setzen $r := s - \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$ (Idee aus Skizze) und zeigen $K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{y}_0, s)$. Dazu sei $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, r)$, dh $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$. Dann gilt

$$\|\vec{x} - \vec{y}_0\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{y}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < r + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = s,$$

also $\vec{x} \in K(\vec{y}_0, s)$. $\square$

Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen , falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiele: $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen. Endliche Mengen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kugeln

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}$$

sind abgeschlossen.

Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. f heißt stetig in I, falls jede komponente f_j von f stetig ist in I.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. D heißt wegzusammenhängend , falls es für jedes paar $\vec{x}, \vec{y} \in D$ einen weg von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ in D gibt, d.h. eine stetige Funktion $f : [0,1] \to D$ mit $f(0) = \vec{x}$ und $f(1) = \vec{y}$.

Beispiel Die Kugel $K(\vec{x_0}, r)$ ist eine wegzusammenhängende Menge. $D := K((0,0),1) \cup K((3,3),2)$ ist keine wegzusammenhängende Menge in $\mathbb{R}^2$, weil zum Beispiel $(0,0),(3,3) \in D$ es gibt aber keinen Weg von $(0,0)$ nach $(3,3)$ in D.

2.3 Limes und Stetigkeit von Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$, die Komponentenfunktionen von f mit

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist, mit mehr als ein Elemente. Wir sagen, dass

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{c},$$

falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \implies \|f(\vec{x}) - \vec{c}\| < \epsilon$.

Satz: Es gilt

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{c},$$

dann und nur dann, wenn $f(\vec{x_n}) \to \vec{c}$, für alle Folgen $\vec{x_n}$ mit $\vec{x_n} \to \vec{x_0}$.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, mit mehr als ein Elemente. Die Funktion f heißt stetig in $\vec{x}_0 \in D$, falls

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

f heißt stetig in D, falls f in **jedem** $\vec{x}_0 \in D$ stetig ist [1].

Beispiele: (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. f ist in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ stetig. f ist aber in $(0,0)$ nicht stetig, denn für $x_k = y_k = 1/k$ gilt

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{2x_k^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad (k \to \infty).$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x|y|^\beta (x^2+y^2)^{-1} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$, wobei $\beta > 1$. Die Funktion ist in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ stetig. f ist auch $(0,0)$ stetig, denn wegen $|xy| \leq (x^2+y^2)/2$ gilt

$$|f(x,y)| = \frac{|y|^{\beta-1}}{2} \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq |y|^{\beta-1}/2 \to 0 \quad (y \to 0).$$

(3) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist ϕ stetig: Wegen $\|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})\| = \|\phi(\vec{x} - \vec{y})\|$ reicht es, Stetigkeit in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ zu zeigen. Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\phi(\vec{x})\| = \|\sum_{j=1}^n x_j \phi(\vec{e}_j)\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\phi(\vec{e}_j)\| \leq \|\vec{x}\| \sqrt{\sum_{j=1}^n \|\phi(\vec{e}_j)\|^2}.$$

Für $\|\vec{x}\| \to 0$ gilt also $\|\phi(\vec{x})\| \to 0$.

(4) Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig. Die Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind stetig, des weiteren Skalarprodukt, Matrix-Vektor-Produkt, Multiplikation von Matrizen, Determinante und Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$. Auch die auf den invertierbaren Matrizen erklärte Matrixinversion ist stetig (Cramersche Regel!).

2.4 Differenzierbarkeit von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$

Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Definition: Die Funktion f heißt differenzierbar in $t_0 \in I$, [bzw. in I] genau dann, wenn jede Komponentenfunktion f_j, $j = 1, \ldots, n$, differenzierbar in t_0 [bzw. in I] ist. Wir

[1] Die obigen Definitionen des Limes und der Stetigkeit sind auch anwendbar wenn D eine endliche Vereinigung von solchen Mengen ist. Eigentlich kann man den Begriff der Stetigkeit, für jede Teilmenge D definieren, aber das machen wir hier nicht.

definieren dann

$$\dot{f}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

f heißt stetig differenzierbar in I oder eine C^1-Funktion, falls $\dot{f} : I \to \mathbb{R}^n$ zusätzlich stetig ist (d.h. wenn alle $\dot{f}_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, stetig sind.).

Beispiele: Sei $f : I \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben durch

(1) $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$ mit $r > 0$ und $I = [0, 2\pi]$ (Kreisrand um $(0,0)$ mit Radius r). Dann gilt $\dot{x}(t) = -r\sin t$, $\dot{y}(t) = r\cos t$, und f ist C^1.

(2) $x(t) = e^{-t}\cos t$, $y(t) = e^{-t}\sin t$ mit $I = [0, \infty)$ (logarithmische Spirale). Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \\ \dot{y}(t) &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, \end{aligned}$$

und f ist C^1.

(3) Wir können das Differentialgleichungssystem $\dot{x}(t) = 3x(t) + y(t)$, $\dot{y}(t) = y(t) + 3x(t)$ mittels $z(t) := \binom{x(t)}{y(t)}$ schreiben als $\dot{z}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) z(t)$.

2.5 Raumkurven und Bogenlänge von Raumkurven

Eine Raumkurve ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Meist ist I von der Form $[a, b]$. Die Menge $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Spur von γ oder Bild von γ .

Bogenlänge von Raumkurven Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Raumkurve, so ist ihre Länge (oder Bogenlänge) gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Beispiele: Die Abbildungen aus Beispiel 2.4(1) und (2) sind Raumkurven.

(1) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$. Dann gilt (vgl. 2.4):

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Das ist der Umfang eines Kreises mit Radius r.

(2) Für die logarithmische Spirale $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$ berechnen wir unter der Verwendung der Formel für $\dot{\gamma}(t)$ aus Beispiel 2.4(2):

$$L(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\, dt = \sqrt{2}.$$

2.6 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Definition: f heißt in $\vec{x}_0 \in D$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

in $\mathbb{R}^m$ existiert. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$ heißt Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

Bemerkung: Da D offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $\vec{x}_0 + t\vec{v} \in D$ für $t \in (-\delta,\delta)$. Setzt man $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$, $|t| < \delta$, so ist $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \dot{g}(0)$ (vgl 2.4).

Definition Die Richtungsableitungen von f in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ partielle Ableitungen von f , dh

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x}_0) \quad \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_k \text{ im Punkt } \vec{x}_0$$

für $k = 1,\ldots,m$. Man schreibt oft auch nur $f_{x_k}(\vec{x}_0)$.

Beispiele: (1) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ ist offen. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{-x}\cos y + \log z$. In jedem Punkt existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}\cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-x}\sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Hier wurde jeweils in der Notation das Argument (x,y,z) unterdrückt!

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$. Sei $\vec{v} = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Richtung. Es gilt für $t \neq 0$:

$$\frac{f((0,0) + t(\xi,\eta)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t\xi,t\eta)}{t} = \frac{1}{t}\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Der Limes für $t \to 0$ existiert in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\xi\eta = 0$ ist, dh genau dann, wenn $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ ist. Also existiert $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ genau dann, wenn $\vec{v}$ ein Vielfaches von $\vec{e}_1$ oder ein Vielfaches von $\vec{e}_2$ ist.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$. Für $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ gilt hier

$$\frac{f((0,0)+t(\xi,\eta)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{t^3}{t^3} \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2+\eta^2}$$

und wir erhalten für $t \to 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial(\xi,\eta)}(0,0) = \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2+\eta^2}$$

für jede Richtung $(\xi,\eta) \neq (0,0)$.

Übung: Existiert in $\vec{x}_0$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ und ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\vec{v})}(\vec{x}_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0).$$

2.7 Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, sowie $\vec{x}_0 \in D$. Idee der Differenzierbarkeit in 2.4 (und in HM I) war im Fall $n = 1$:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{für } \vec{x} \text{ nahe } \vec{x}_0.$$

Dabei ist $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1}$, dh $h \mapsto f'(\vec{x}_0)h$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

Definition: f heißt differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$ (gelegentlich total differenzierbar in $\vec{x}_0$), falls es eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \phi(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \to 0 \quad (\vec{x} \to \vec{x}_0)$$

bzw.

$$\frac{\|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \phi(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \to 0 \quad (\vec{h} \to 0).$$

In diesem Fall ist die lineare Abbildung ϕ eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von f in $\vec{x}_0$, Bezeichnung: $f'(\vec{x}_0) := \phi$. Andere Bezeichnungen: $Df(\vec{x}_0)$, $J_f(\vec{x}_0)$, Jacobimatrix , Funktionalmatrix. Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Matrix zur ϕ bezüglich der Standardbasen, dann schreibt man auch $f'(\vec{x}_0) = A$.

f heißt differenzierbar in D, falls f in **jedem** $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar ist.

Satz: (a) Ist f differenzierbar in $\vec{x}_0$, so ist f stetig in $\vec{x}_0$.

(b) Ist f differenzierbar in $\vec{x}_0$, so existieren in $\vec{x}_0$ alle Richtungsableitungen von f und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{v} \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{e}_k \quad k\text{-te Spalte von } f'(\vec{x}_0), k = 1, \ldots, n,$$

und

$$f'(\vec{x}_0) = \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\Big)_{j=1\,k=1}^{m\ \ n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Im Fall $m = 1$ ist also

$$f'(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad \text{(Zeilenvektor).}$$

Beispiele: (1) Die Funktion f aus Beispiel 2.6(2) ist **nicht** differenzierbar in $(0,0)$, da in $(0,0)$ nicht alle Richtungsableitungen existieren.

(2) Die Funktion f aus Beispiel 2.6(3) ist **nicht** differenzierbar in $(0,0)$: Es gilt $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. Wäre f differenzierbar in $(0,0)$, so wäre $f'(0,0) = (0\ 0)$ und somit $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) = 0$. Nach Beispiel 2.6(3) ist aber $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) = 1/2 \neq 0$.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ ist in $(0,0)$ differenzierbar: Zunächst berechnen wir $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0) = 0$. Unser Kandidat für $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ ist also $A := (0\ 0)$. Nun schätzen wir ab:

$$\frac{\|f(x,y) - f(0,0) - A\binom{x}{y}\|}{\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\|} = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^{3/2}y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq |x|^{1/2} \to 0$$

für $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$. Somit ist f in $(0,0)$ differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x}) = B\vec{x}$, wobei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Für $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) = B(\vec{x}+\vec{h}) - B\vec{x} = B\vec{x} + B\vec{h} - B\vec{x} = B\vec{h}.$$

Wir wählen also $A := B$ in der Definition und erhalten, dass f auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit $f'(\vec{x}) = B$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ konstant.

(5) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \vec{x}^T B\vec{x}$, wobei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch sei. Dann gilt für $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) = (\vec{x}+\vec{h})^T B(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{x}^T B\vec{x} = \vec{x}^T B\vec{h} + \underbrace{\vec{h}^T B\vec{x}}_{=\vec{x}^T B\vec{h}} + \vec{h}^T B\vec{h} = 2\vec{x}^T B\vec{h} + \vec{h}^T B\vec{h}.$$

Die Abbildung $\vec{h} \mapsto 2\vec{x}^T B\vec{h}$ ist linear, und es gilt

$$|f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - 2\vec{x}^T B\vec{h}| = |\vec{h}^T B\vec{h}| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2$$

(Die Abschätzung ist klar, wenn B eine Diagonalmatrix ist. Ist B keine Diagonalmatrix, so diagonalisiere B durch eine orthogonale Matrix S, dh $D = S^T BS$ bzw. $B = SDS^T$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |\vec{h}^T B\vec{h}| = |\vec{h}^T SDS^T\vec{h}| = |(S^T\vec{h})D(S^T\vec{h})| &\leq \max\{|\lambda| :\ \lambda \text{ EW von } D\} \cdot \|S^T\vec{h}\|^2 \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2 \end{aligned}$$

wegen $\|S^T\vec{h}\| = \|\vec{h}\|$.)

2.8 Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$.

Definition: f heißt in D partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D existieren, und stetig partiell differenzierbar in D, falls die partiellen Ableitungen zusätzlich auf D stetig sind.

Satz: Sei f in D partiell differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in $\vec{x}_0$, so ist f in $\vec{x}_0$ differenzierbar.

Definition: Eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar , geschrieben $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 2.6(2) gilt $f_x = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ und $f_y = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.

2.9 Der Gradient

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in D, so ist der Gradient von f in $\vec{x}_0 \in D$ der Vektor der partiellen Ableitungen in $\vec{x}_0$, also

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt statt $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ auch $\nabla f(\vec{x}_0)$ ("Nabla f"), wobei der Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als Differentialoperator verstanden wird, der auf die reellwertige Funktion f wirkt und daraus die vektorwertige Funktion $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ macht.

Bemerkung (Zusammenhang mit der Ableitung): Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in D differenzierbar, so gilt für $\vec{x}_0 \in D$:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$$

(beachte $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$).

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar und $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Dann gilt für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)) \cdot \vec{v}.$$

Insbesondere, wenn $\|\vec{v}\| = 1$ gilt

$$-\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \leq \|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|.$$

Dabei gilt Gleichheit rechts genau dann, wenn $\vec{v} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)/\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|$ ist (dh "der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f").

Außerdem steht $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ senkrecht auf der Niveaulinie $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$.

Beweis. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \overset{19.9}{=} f'(\vec{x}_0)\vec{v} = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0))^T \vec{v} = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)) \cdot \vec{v}.$$

Nun verwendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

2.10 Ableitungen höherer Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Existiert die partielle Ableitung $\partial f/\partial x_k$, so kann $\partial f/\partial x_k : D \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sein. Man gelangt so gegebenenfalls zu partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend werden (falls vorhanden) Ableitungen höherer Ordnung definiert.

Schreibweisen: $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = f_{xxy}$ etc.

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>k-mal stetig (partiell) differenzierbar</u>, falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ auf D existieren und dort stetig sind. Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^k(D, \mathbb{R})$.

$f : D \to \mathbb{R}^k$ heißt <u>k-mal stetig differenzierbar</u>, $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, falls für alle Komponentenfunktionen f_j, $j = 1, \ldots, m$ gilt: $f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$.

Satz von Schwarz: Ist $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, so sind partielle Ableitungen einer Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 2.6(2) existieren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $f \in C^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Man schreibt dafür auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.

2.11 Kettenregel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $f(D) \subseteq G$, und sei $g : G \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $\vec{x}_0$, und es gilt:

$$\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(“äußere Ableitung mal innere Ableitung”).

Beispiele: (1) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann ist $F \circ \phi : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(\phi(t))$ differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ \phi)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\phi(t))\phi_j'(t), \quad t \in I,$$

wobei $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n : I \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von ϕ sind. Ist $n = 3$ und schreibt man $F(x, y, z)$, $\phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und $\tilde{F}(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, so gilt

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sowie $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $F(\vec{x}) := f(B\vec{x})$. Dann gilt

$$\underbrace{\nabla F(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^m} = F'(\vec{x})^T = (f'(B\vec{x})B)^T = B^T (f'(B\vec{x}))^T = \underbrace{B^T}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{(\nabla f)(B\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

2.12 Der Umkehrsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $\vec{x}_0 \in D$ und $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **regulär** (d.h. invertierbar). Dann gibt es offene Mengen U und V mit $\vec{x}_0 \in U \subseteq D$, $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0) \in V$ derart, dass $f : U \to V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(\vec{y}) = \Big(f'(f^{-1}(\vec{y}))\Big)^{-1}, \quad \vec{y} \in V.$$

Bemerkung: Die Eigenschaft regulär ersetzt hier für $n > 1$ die Bedingung $f'(x_0) \neq 0$, die im Fall $n = 1$ vorausgesetzt werden muss. Die Formel für die Ableitung von f^{-1} erhält man auch aus der Kettenregel, wenn man die Gleichung

$$\vec{x} = f^{-1}(f(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U,$$

nach $\vec{x}$ ableitet. Das ergibt

$$I_n = (f^{-1})'(f(\vec{x}))f'(\vec{x}), \quad \text{also} \quad (f^{-1})'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$$

für jedes $\vec{x} \in U$.

ACHTUNG: Der Satz besagt nur, dass es **lokal** eine Umkehrfunktion zu f gibt. Auf ganz D muss dies nicht gelten!

Beispiel: Sei $D := (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Dann ist D offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, sowie

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\det f'(r, \varphi) = r > 0$ ist $f'(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$ regulär, und nach dem Umkehrsatz ist f lokal bijektiv.
Andererseits ist $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$, dh $f : D \to \mathbb{R}^2$ ist nicht injektiv.
Es ist $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aber $f : D \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** bijektiv.

2.13 Der Satz über implizit definierte Funktionen

Motivation: Die Gleichung $y - x^2 = 0$ lässt sich eindeutig nach y auflösen durch $y = x^2$. Die Auflösung von $x - y^2 = 0$ nach y ist hingegen global nicht mehr möglich.

Für gegebene (x_0, y_0) mit $x_0 - y_0^2 = 0$ und $y_0 > 0$ bzw. $y_0 < 0$ ist diese Auflösung lokal noch möglich (durch $y = \sqrt{x}$ bzw. $y = -\sqrt{x}$ für (x, y) nahe (x_0, y_0)). Jedoch ist in keiner Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eine Auflösung durch eine **Funktion** möglich.

Satz: Sei $n > m$, $p := n - m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit Komponentenfunktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$. Wir schreiben die Variablen in $\mathbb{R}^n$ als $(\vec{x}, \vec{y})$ mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, sowie

$$f'(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

wobei wir den linken Block als $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und den rechten Block als $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bezeichnen.

Ist $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$ mit $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ **regulär** (dh $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$), so gibt es offene Umgebungen U von $\vec{x}_0$ und V von $\vec{y}_0$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ derart, dass für alle $\vec{x} \in U$ und $\vec{y} \in V$ gilt: $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ und

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{y} = g(\vec{x}),$$

dh durch die Funktion $g : U \to V$ ist (lokal um $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$) eine eindeutige Auflösung der Gleichung $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ nach $\vec{y}$ gegeben (bzw. $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in U \times V : f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}\}$ ist Graph der Funktion $g : U \to V$).

Bemerkung: Ableitungen von g kann man nach der Kettenregel aus

$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in U,$$

berechnen: es ist

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})) + \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))g'(\vec{x}), \quad \vec{x} \in U,$$

also

$$g'(\vec{x}) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U.$$

Beispiele: (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$ für alle x_0, y_0 mit $f(x_0, y_0) = 0$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sinh(yz) + (z - x)^2 - 1 \\ \cos^2(\pi y) + z - x^2/2 \end{pmatrix}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$. Hier ist $n = 3$, $p = 1$, $m = 2$, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix regulär ist und $f(2, 0, 1) = \binom{0}{0}$ gilt, ist in einer Umgebung von $(2, 0, 1)$ eine Auflösung des Gleichungssystems $f(x, y, z) = \binom{0}{0}$ nach y und z (jeweils als Funktion von

x) möglich. Dh es gibt Funktionen $g_1, g_2 : U \to \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung U von 2, und eine offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,1)$ derart, dass für alle $(x,y,z) \in U \times V$ gilt:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $g = \binom{g_1}{g_2}$ ist dabei C^1 mit

$$g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(2,0,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Man kann den Satz verwenden, um zu Parameterdarstellungen von implizit gegebenen Flächen im $\mathbb{R}^3$ zu kommen. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ der Oberfläche der Einheitskugel (dh der Einheitssphäre) S^2. Hier ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + y2 + z^2 - 1$, und $n = 3$, $p = 2$, $m = 1$. Es gilt

$$f'(x,y,z) = (2x \ 2y \ 2z) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Haben wir also einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ mit $z_0 \neq 0$, so finden wir offene Umgebungen U von (x_0, y_0), V von z_0 und auf U eine auflösende Funktion $g(x,y)$ derart, dass für $(x,y,z) \in U \times V$ gilt

$$(x,y,z) \in S^2 \Longleftrightarrow z = g(x,y).$$

Hier kann man U, V und g konkret angeben: $g(x,y) = \operatorname{sgn}(z_0)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ auf $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und z.B. $V = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot (0, \infty)$. In Punkten $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ mit $z_0 = 0$ ist so eine lokale Auflösung nach z nicht möglich. Man kann dann aber zumindest nach einer der Variablen x oder y lokal auflösen.

Als Bonus:

Beweisidee 2.13 $\Rightarrow$ 2.12: Setze $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - f(\vec{x})$. Es ist $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) = -f'(\vec{x})$ regulär. Also kann man $\vec{y} - f(\vec{x}) = \vec{0}$ lokal nach $\vec{x}$ auflösen. Die Auflösung ist f^{-1}.

Beweisidee 2.12 $\Rightarrow$ 2.13: Setze $F(\vec{x}, \vec{y}) = \binom{\vec{x}}{f(\vec{x}, \vec{y})}$. Dann ist $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial f}{\partial \vec{y}} \end{pmatrix} (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Wegen $\det F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$ ist $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ regulär. Setze $g(\vec{x}) :=$ zweite Komponente von $F^{-1}(\vec{x}, \vec{0})$. Dann gilt:

$$\vec{y} = g(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix} = F^{-1}(\vec{x}, \vec{0}) \Leftrightarrow F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}.$$

2.14 Der Satz von Taylor

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $l \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{l+1}(D, \mathbb{R})$ und $\vec{x}_0 \in D$.

Für $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\begin{aligned}
\vec{h} \cdot \nabla &:= h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\
(\vec{h} \cdot \nabla) f(\vec{x}_0) &:= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}
\end{aligned}$$

und

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 := \Big(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 = \sum_{j,k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) := \sum_{j,k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend definiert man für $k = 1, 2, \ldots, l+1$:

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^k := \Big(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^k, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0) := \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_k = 1}^{n} h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(\vec{x}_0).$$

Beispiel: Für $n = 2$, $\vec{h} = (h_1, h_2)$ und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ hat man also

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f = h_1^2 f_{xx} + h_1 h_2 f_{xy} + h_2 h_1 f_{yx} + h_2^2 f_{yy} = h_1^2 f_{xx} + 2 h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}.$$

Zur allgemeinen Betrachtung von $(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0)$ definieren wir die <u>Hesse-Matrix von f in $\vec{x}_0$</u> :

$$H_f(\vec{x}_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) \Big)_{j,k=1}^{n}.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(\vec{x}_0)$ symmetrisch, wenn $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Damit ist

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{h}.$$

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$S[\vec{x}, \vec{y}] = \{ \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) : t \in [0, 1] \}$$

die <u>Verbindungsstrecke</u> von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Satz von Taylor: Unter den obigen Voraussetzungen seien $\vec{x}_0 \in D$ und $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$. Dann gibt es ein $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$ mit

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!}(\vec{h} \cdot \nabla) f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) + \ldots + \frac{1}{l!}(\vec{h} \cdot \nabla)^l f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(l+1)!}(\vec{h} \cdot \nabla)^{l+1} f(\vec{\xi}).$$

Bemerkung: (a) Für $l = 0$ erhält man einen mehrdimensionalen Mittelwertsatz.

(b) Der Ausdruck

$$T_{l,\vec{x}_0}(\vec{h}) := f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{l} \frac{(\vec{h}\cdot\nabla)^k f(\vec{x}_0)}{k!}$$

heißt l-tes Taylorpolynom von f in $\vec{x}_0$. Statt $\vec{h}$ schreibt man auch $\vec{x} - \vec{x}_0$.

(c) Für $l = 1$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ erhalten wir, wenn $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T H_f(\vec{\xi})\vec{h}$$

für ein $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$. Schreibt man $\vec{x} - \vec{x}_0$ statt $\vec{h}$, so ist $\vec{x}_0 + \vec{h} = \vec{x}$.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xe^y - 2}$ und $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $f_x = e^y f$, $f_y = xe^y f$, sowie $f_{xx} = e^{2y} f$, $f_{xy} = e^y(f + f_y) = (e^y + xe^{2y})f$, $f_{yy} = xe^y(f + f_y) = (xe^y + x^2e^{2y})f$. Wir erhalten

$$f(2, 0) = 1, f_x(2, 0) = 1, f_y(2, 0) = 2, f_{xx}(2, 0) = 1, f_{xy}(2, 0) = 3, f_{yy}(2, 0) = 6,$$

und damit ist das zweite Taylorpolynom von f in $(2, 0)$ gegeben durch

$$T_{2,(2,0)}(h_1, h_2) = 1 + 1 \cdot h_1 + 2h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + 3h_1h_2 + 3h_2^2$$

bzw., wenn man $h_1 = x - 2$ und $h_2 = y$ berücksichtigt, durch

$$1 + (x - 2) + 2y + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3(x - 2)y + 3y^2.$$

2.15 Lokale Extremstellen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$.

Definition: f hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Maximum [bzw. lokales Minimum], falls es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $K(\vec{x}_0, \delta) \subseteq D$ und $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ [bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$] für alle $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, \delta)$ gilt.

Ein lokales Extremum ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Satz über lokale Extremstellen: Sei $\vec{x}_0 \in D$.

(a) Hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum und ist f in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar, so ist $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

(b) Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Dann gilt:

(i) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum.

(ii) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum.

(iii) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, so hat f in $\vec{x}_0$ **kein** lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt .

Beispiel für einen Sattelpunkt: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Dann ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \binom{y}{x}$ und $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \binom{0}{0}$ gilt nur für $(x_0,y_0) = (0,0)$. Für die Hessematrix gilt $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat eine negative Determinante und ist daher indefinit (siehe Kapitel 1.7). Somit hat f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt. Für (x,y) im ersten oder dritten Quadranten ist $f(x,y) = xy > 0$, für (x,y) im zweiten oder vierten Quadranten ist $f(x,y) = xy < 0$.

Bemerkung: Trifft in (b) keiner der Fälle (i), (ii) oder (iii) zu, so ist $H_f(\vec{x}_0)$ (positiv oder negativ) **semidefinit** (siehe Kapitel 1.7), und es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Nullstellen des Gradienten heißen auch kritische Punkte .

Im Beweis von (b) verwendet man Bemerkung 2.14(c), dh

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h}^T H_f(\vec{\xi})\vec{h},$$

und die Tatsache, dass man wegen $f \in C^2$ ein $\delta > 0$ so findet, dass $H_f(\vec{\xi})$ für $\vec{\xi} \in K(\vec{x}_0, \delta)$ dieselben Definitheitseigenschaften wie $H_f(\vec{x}_0)$ hat.

Alternativ kann man für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und kleine $t \in \mathbb{R}$ definieren $g(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$. Dann ist $g \in C^2$ mit $g'(t) = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$, $g'(0) = 0$ und

$$g''(0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'(\vec{x}_0)\vec{h}h_j = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0) h_j h_k = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0)\vec{h}.$$

Verwende nun HM I.

Beispiel: $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. Hier gilt

$$f_x = 3x^2 - 12y, \quad f_y = -12x + 24y^2.$$

Wir formen äquivalent um:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{matrix} \iff \begin{matrix} y^4 = y \\ 2y^2 = x \end{matrix} \iff$$
$$\iff \begin{matrix} y \in \{0,1\} \\ 2y^2 = x \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir berechnen die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Es ist
$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = -24 < 0,$$
also ist $H_f(0,0)$ indefinit und f hat in $(0,0)$ **kein** lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt. Weiter ist
$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$
wegen $\det H_f(2,1) > 0$ und $12 > 0$ positiv definit (siehe 1.7). Also hat f in $(2,1)$ ein lokales Minimum.

2.16 Extremwertaufgaben

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D,\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$ und $h \in C^1(D,\mathbb{R}^p)$ mit Komponentenfunktionen $h_1, h_2, \ldots, h_p : D \to \mathbb{R}$, sowie $S := \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Definition: Man sagt "f hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Maximum [Minimum] unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$", falls $\vec{x}_0 \in S$ gilt und es ein $\delta > 0$ gibt mit $K(\vec{x}_0,\delta) \subseteq D$ und $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ [bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$] für alle $\vec{x} \in K(\vec{x}_0,\delta) \cap S$.

Zur Existenz: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>kompakt</u> , wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. Dabei heißt K <u>beschränkt</u> , falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|\vec{x}\| \leq M$ für alle $\vec{x} \in K$.

Satz: Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt und es gibt $\vec{a}, \vec{b} \in K$ mit
$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in K.$$

Beispiel: Seien $n = 3$, $p = 2$ und $D = \mathbb{R}^3$, sowie
$$f(x,y,z) = x + y + z, \qquad h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x + z - 1 \end{pmatrix}.$$
Dann sind f, h stetig differenzierbar auf D und
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}.$$
Die Menge S ist abgeschlossen: für eine Folge (x_k, y_k, z_k) in S mit $(x_k, y_k, z_k) \to (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Die Menge S ist beschränkt: Sind $(x,y,z) \in S$, so gilt $x^2 + y^2 = 2$ und somit $|x| \leq \sqrt{2}$. Also ist $|z| = |1 - x| \leq 1 + |x| \leq 1 + \sqrt{2}$ und $\|(x,y,z)\| \leq \sqrt{2 + (1+\sqrt{2})^2} =: M$.

Also ist S kompakt, und nach dem Satz gibt es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ mit $f(\vec{a}) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{b})$ für alle $\vec{v} \in S$.

2.17 Multiplikatorenregel von Lagrange

Seien n, D, n, f, p, h und S wie in 2.16. Definiere die Funktion $F : D \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ durch

$$F(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) := f(\vec{x}) + \lambda_1 h_1(\vec{x}) + \lambda_2 h_2(\vec{x}) + \dots + \lambda_p h_p(\vec{x})$$

für $\vec{x} \in D$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Satz: Hat f in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$ und gilt

$$\text{Rang}\, \underbrace{h'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = p \quad [h'(\vec{x}_0) \text{ hat } \underline{\text{vollen}}, \text{ dh maximalen, Rang}],$$

so gibt es $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ (Lagrangemultiplikatoren) mit

$$\operatorname{grad} F(\vec{x}_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0) = \vec{0}.$$

Bemerkung: (a) Beachte, dass die Zeilen von $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ gerade $\operatorname{grad} h_1(\vec{x}_0)^T, \operatorname{grad} h_2(\vec{x}_0)^T, \dots, \operatorname{grad} h_p(\vec{x}_0)^T$ sind. Die Voraussetzung an den Rang von $h'(\vec{x}_0)$ bedeutet also, dass $\operatorname{grad} h_1(\vec{x}_0), \operatorname{grad} h_2(\vec{x}_0), \dots, \operatorname{grad} h_p(\vec{x}_0)$ linear unabhängig sind.

(b) Schreibt man $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, so ist die Bedingung $\operatorname{grad} F = \vec{0}$ ein Gleichungssystem mit $n+p$ Gleichungen für die $n+p$ Unbekannten $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0$, nämlich

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^0 \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$) und

$$h_j(\vec{x}_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$, diese sind gleichbedeutend mit $\vec{x}_0 \in S$).

(c) Zur Bestimmung der Extrema versucht man, dieses Gleichungssystem zu lösen. Kann man den Satz anwenden (dh sind die Voraussetzungen erfüllt), so findet man die gesuchten Extremstellen unter den Lösungen dieses Gleichungssystems. Kann man den Satz **nicht** anwenden (weil es z.B. lokale Extremstellen $\vec{x}_0$ gibt, in denen $h'(\vec{x}_0)$ nicht vollen Rang hat), so ist dies **nicht sicher**!

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels aus 2.16): Wir wissen schon, dass es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ gibt mit: f hat in $\vec{a}$ [bzw. in $\vec{b}$] ein globales Minimum [bzw. Maximum] unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$.

Wir haben

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $\operatorname{Rang} h'(x,y,z) < 2$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x,y,z) \in S$ wegen $x^2 + y^2 = 2$ nicht vorkommt. Also ist

$$\operatorname{Rang} h'(x,y,z) = 2 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in S,$$

und die Voraussetzungen des Satzes sind insbesondere in $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllt. Hier ist

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

und

$$F_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2,\ F_y = 1 + 2\lambda_1 y,\ F_z = 1 + \lambda_2,\ F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2,\ F_{\lambda_2} = x + z - 1.$$

Aus $\operatorname{grad} F = \vec{0}$ erhält man also $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 \neq 0$, $x = 0$, $z = 1$ und $y = \pm\sqrt{2}$ (der genaue Wert von λ_1 ist nicht wichtig).

Wegen $f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = 1 \pm \sqrt{2}$ ist $\vec{a} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ die Minimal- und $\vec{b} = (0, \sqrt{2}, 1)$ die Maximalstelle. Der maximale Wert von f auf S ist $f(\vec{b}) = 1 + \sqrt{2}$ und der minimale Wert von f auf S ist $f(\vec{a}) = 1 - \sqrt{2}$.

Erläuterung zum Satz (als Bonus): Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück, dh n, D, f, p und h wie in 2.16, $S = \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Weiter sei $\vec{x}_0 \in S$ mit

$$\operatorname{Rang} h'(\vec{x}_0) = p.$$

Wir zeigen, wie man S lokal in der Nähe von $\vec{x}_0$ parametrisieren kann. Wir setzen $q := n - p$ und finden p linear unabhängige Spalten von $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Dies seien o.B.d.A. die letzten p Spalten. Wir schreiben $\vec{x} = (\vec{y}, \vec{z})$ mit $\vec{y} = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ und $\vec{z} = (x_{q+1}, \ldots, x_{q+p}) \in \mathbb{R}^p$, sowie entsprechend $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Dann ist $\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ regulär (da die Matrix Rang p hat), und nach 2.13 gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^q$ von $\vec{y}_0$, $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von $\vec{z}_0$ und eine C^1-Funktion $g : U \to V$ mit $g(\vec{y}_0) = \vec{z}_0$ so, dass für alle $(\vec{y}, \vec{z}) \in U \times V$ gilt:

$$h(\vec{y}, \vec{z}) = \vec{0} \iff \vec{z} = g(\vec{y}).$$

Die Funktion $U \to \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \mapsto \binom{\vec{y}}{g(\vec{y})}$ ist also eine Parametrisierung von $S \cap (U \times V)$. Außerdem haben wir

$$g'(\vec{y}_0) = -\Big(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Hat nun f zusätzlich in $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, g(\vec{y}_0))$ eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$, so hat die Funktion $U \to \mathbb{R}$, $\vec{y} \mapsto f(\vec{y}, g(\vec{y}))$, in $\vec{y}_0$ eine lokale Extremstelle. Nach Satz 2.15(a) und der Kettenregel ist also

$$\vec{0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) g'(\vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Wir setzen $\vec{\lambda}_0^T := \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big)^{-1} \in \mathbb{R}^{1\times p}$ und haben

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\Big)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0),$$

also
$$f'(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T h'(\vec{x}_0), \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = h'(\vec{x}_0)^T \vec{\lambda}_0.$$
Das ist die Aussage des Satzes.

2.18 Rotation, Divergenz, Laplace

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld (auf D) und eine Funktion $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld (auf D) .

Bemerkung: Ist $f \in C^1$ ein Skalarfeld auf D, so ist $\operatorname{grad} f = \nabla f$ ein Vektorfeld auf D.

Partielle Ableitungen schreiben wir im folgenden als
$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Definition: Sei $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld auf D mit Komponentenfunktionen $v_1, v_2, \ldots, v_n : D \to \mathbb{R}$. Dann definiert man die Divergenz von $\vec{v}$ durch
$$\operatorname{div} \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \ldots + \partial_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j$$
und im Fall $n = 3$ die Rotation von $\vec{v}$ durch
$$\operatorname{rot} \vec{v} := \nabla \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: (a) $\operatorname{div} \vec{v}$ ist ein Skalarfeld auf D und $\operatorname{rot} \vec{v}$ ist ein Vektorfeld auf D.

(b) Vektorfelder mit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ heißen quellenfrei und Vektorfelder mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ heißen wirbelfrei .

(c) Für C^2-Skalarfelder $f : D \to \mathbb{R}$ definiert man den Laplaceoperator durch
$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f := \nabla \cdot \nabla f := \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f,$$
und für C^2-Vektorfelder $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ durch
$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiele: (1) Sei $\vec{v}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\vec{v}(\vec{x}):=\vec{x}$. Dann gilt $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{x})=n$ für jedes $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. Im Falle $n=3$ gilt $\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{0}$ auf $\mathbb{R}^3$.

(2) Sei $\vec{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z):=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$. Dann ist $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

(3) Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, sowie $g:=f\circ A$, dh $g(\vec{x})=f(A\vec{x})$. Dann gilt $\Delta g=(\Delta f)\circ A$:

Wir schreiben hier $D\vec{v}$ statt $\vec{v}\,'$ für die Ableitung eines Vektorfelds $\vec{v}$. Es gilt dann

$$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{Spur}(D\vec{v}).$$

Nun haben wir nach der Kettenregel (siehe 2.11):

$$\begin{aligned}\Delta g &= \operatorname{div}(\nabla g)=\operatorname{div}(A^T(\nabla f)\circ A)\\ &= \operatorname{Spur}(D(A^T(\nabla f)\circ A))=\operatorname{Spur}(A^TD((\nabla f)\circ A))\\ &= \operatorname{Spur}(A^T((D(\nabla f))\circ A)A).\end{aligned}$$

Nach Satz 1.4(a) ist dies

$$=\operatorname{Spur}(((D(\nabla f))\circ A)\underbrace{AA^T}_{=I_n})=\operatorname{Spur}((D(\nabla f))\circ A)=(\operatorname{div}(\nabla f))\circ A=(\Delta f)\circ A.$$

Bedeutung: Ist $Jf:=f\circ A$, so gilt $\Delta f=J^{-1}\Delta Jf$ für jede C^2-Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, dh Δ ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

(4) Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten: Sei $u=u(x,y)$ eine C^2-Funktion. Wir verwenden Polarkoordinaten $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ und schreiben $v(r,\varphi):=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$. Nun wenden wir $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ auf $u(x,y)=v(r(x,y),\varphi(x,y))$ an, wollen dies aber mittels v und den Variablen r,φ ausdrücken. Nach Ketten- und Produktregel haben wir:

$$\begin{aligned}\partial_x v(r,\varphi) &= v_r r_x+v_\varphi\varphi_x\\ \partial_x^2 v(r,\varphi) &= \partial_x(v_r)r_x+v_r r_{xx}+\partial_x(v_\varphi)\varphi_x+v_\varphi\varphi_{xx}\\ &= v_{rr}(r_x)^2+v_{r\varphi}r_x\varphi_x+v_r r_{xx}+v_{\varphi r}r_x\varphi_x+v_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2+v_\varphi\varphi_{xx}\\ \Delta v(r,\varphi) &= v_r(r_{xx}+r_{yy})+v_{rr}((r_x)^2+(r_y)^2)+2v_{r\varphi}(r_x\varphi_x+r_y\varphi_y)\\ &\quad +v_\varphi(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})+v_{\varphi\varphi}((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2).\end{aligned}$$

Ableitungen von r und φ nach x und y berechnen wir aus $r^2=x^2+y^2$ und $\tan\varphi=y/x$:

$$2rr_x=2x,\quad \text{also}\quad r_x=x/r=\cos\varphi,\ r_y=y/r=\sin\varphi,\ (r_x)^2+(r_y)^2=1.$$

Weiter ist $rr_{xx}+(r_x)^2=1$, also

$$r_{xx}=\frac{1-(r_x)^2}{r},\ r_{yy}=\frac{1-(r_y)^2}{r}, r_{xx}+r_{yy}=\frac{2-(r_x)^2-(r_y)^2}{r}=\frac{1}{r}.$$

Für die Ableitungen von φ erhalten wir

$$(1+\tan^2\varphi)\varphi_x = -y/x^2, \quad (1+\tan^2\varphi)\varphi_y = 1/x$$

und wegen $1+\tan^2\varphi = (\cos\varphi)^{-2}$:

$$\varphi_x = -\cos^2\varphi\,\frac{y}{x^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \varphi_y = \cos^2\varphi\,\frac{1}{x} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Wir lesen ab:

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = \frac{1}{r^2}, \quad r_x\varphi_x + r_y\varphi_y = 0.$$

Schließlich ist

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -\cos\varphi\cdot\varphi_x\cdot\frac{1}{r} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\cdot r_x - \sin\varphi\cdot\varphi_y\cdot\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi}{r^2}\cdot r_y = 0.$$

Zusammengefasst haben wir also

$$\Delta v(r,\varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}$$

als Formel für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

2.19 Rechenregeln

Produktregeln: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ C^1-Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\cdot(f\vec{v}) &= f(\nabla\cdot\vec{v}) + (\nabla f)\cdot\vec{v} \\
\nabla\times(f\vec{v}) &= f(\nabla\times\vec{v}) + (\nabla f)\times\vec{v} \quad (n=3) \\
\Delta(fg) &= (\Delta f)g + 2\nabla f\cdot\nabla g + f(\Delta g) \quad (f,g\in C^2).
\end{aligned}$$

Zum Nachrechnen wende man die eindimensionale Produktregel aus HM I auf die einzelnen partiellen Ableitungen an:

$$\partial_j(\phi\psi) = (\partial_j\phi)\psi + \phi(\partial_j\psi).$$

Hintereinanderausführung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$ C^2-Funktionen, so gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \vec{0}, \qquad \text{dh} \quad \nabla\times(\nabla f) = \vec{0} \\
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) &= 0 \qquad \text{dh} \quad \nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0
\end{aligned}$$

Die beiden Regeln folgen aus dem Satz von Schwarz.

3 Kurvenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^2$

3.1 Kurvenintegrale von Skalarfeldern

Definition 3.1.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \to D$ ((regulär bedeutet, dass $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, für alle $t \in [a, b]$)) setzt man*

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

(beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sind).

Bemerkung 3.1.1. *(a) Mit diesem Kurvenintegral berechnet man Flächeninhalt von Flächen die nicht Flach sind.*

(b) Für $f = 1$ ist $\int_\gamma ds$ die Länge von γ (vgl. 2.5).

(c) Ist γ wie oben und setzt man $\rho : [a, b] \to D$, $\rho(t) := \gamma(a + b - t)$, so durchläuft ρ die Spur von γ in umgekehrter Richtung. Diese Kurve wird auch mit $-\gamma$ bezeichnet. Es gilt dann

$$\int_{-\gamma} f\, ds = \int_\gamma f\, ds.$$

(d) Sind $\gamma_j : [a_{j-1}, a_j] \to D$, $j = 1, 2, \ldots, m$, reguläre Kurven mit $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$, so bezeichnet man auch $\gamma : [a_0, a_m] \to D$, $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_{j-1}, a_j]$, als Kurve. In den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ muss γ nicht differenzierbar sein, dh die rechts- und linksseitigen Ableitungen in diesen Punkten müssen nicht übereinstimmen. Man schreibt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m$ und definiert

$$\int_\gamma f\, ds := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f\, ds.$$

(e) Ist γ geschlossen , (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$ in einfachen Worten sie aufhört wo sie anfängt), so schreibt man auch

$$\int_\gamma f\, ds = \oint_\gamma f\, ds.$$

3.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Definition 3.2.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \to D$ (regulär bedeutet, dass $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, für alle $t \in [a, b]$) setzt man*

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt.$$

Beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot\gamma(t)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sind und dass $\cdot$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Wichtige Bemerkung: Interpretation dieses Kuvrenintegrals: Ist $\gamma(t)$ der Ort eines sich bewegenden Punktobjektes in D und $\vec{v}$ eine Kraft an das Objekt, dann ist dieses Kurvenintegral die Arbeit der Kraft $\vec{v}$ entlang der Kurve γ.

Beispiele: (1) Es gilt

$$\int_{-\gamma} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s},$$

dh das Kurvenintegral eines Vektorfeldes ändert bei Orientierungsumkehr der Kurve das Vorzeichen (vgl. aber mit Bemerkung 3.1.1 (c)).

(3) Sei $\vec{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y)=\binom{-y}{x}$ und $\gamma(t):=\binom{\cos t}{\sin t}$, $t\in[0,2\pi]$. Dann ist $\dot\gamma(t)=\binom{-\sin t}{\cos t}$ und

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Sei $\vec{w}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $\vec{w}(x,y)=\binom{-y/(x^2+y^2)}{x/(x^2+y^2)}$. Auch hier gilt

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Satz 3.2.1. *Ist $f:D\to\mathbb{R}$ ein C^1-Skalarfeld und $\gamma:[a,b]\to D$ eine Kurve, so gilt*

$$\int_\gamma \nabla f\cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Das liegt an

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{(\nabla f)(\gamma(t))^T}\dot\gamma(t) = (\nabla f)(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)$$

und dem Hauptsatz (aus HM I):

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\gamma(t))\,dt.$$

3.3 Gebiete und einfach zusammenhängende Mengen

Definition 3.3.1. *Eine offene und wegzusammenhängende Teilmenge $G\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet .*

Definition 3.3.2. *Ein Gebiet G heißt* <u>*einfach zusammenhängend*</u>*, wenn es für jede einfach geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to G$ einen Punkt gibt $\vec{c} \in G$ gibt, und eine stetige Funktion $g : [0,1] \times [0,1] \to G$ mit $g(0,t) = \gamma(t)$, für alle $t \in [0,1]$ und $g(1,t) = \vec{c}$ für alle $t \in [0,1]$.*

Dh: Man kann jede einfach geschlossene Kurve in G zu einem Punkt zusammenziehen. Für Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^2$ bedeutet dies anschaulich: "G hat keine Löcher."

Beispiele: $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Gibt es in G einen Punkt $\vec{c} \in G$ mit $S[\vec{x}, \vec{c}] \subseteq G$ für jedes $\vec{x} \in G$ (solche Gebiete heißen sternförmig), so ist G einfach zusammenhängend.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ist einfach zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

3.4 Kurvenintegrale und Potentialfelder

Definition 3.4.1 (Potentialfelder). *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ heißt* <u>*Potentialfeld*</u> *(oder* <u>*Gradientenfeld*</u>*,* <u>*konservatives Feld*</u>*), , falls ein C^1-Skalarfeld (ein* <u>*Potential*</u>*) $f : D \to \mathbb{R}$ existiert mit $\vec{v} = \nabla f$ auf D.*

Bemerkung 3.4.1. *(a) Wegen 2.19 ist ein C^1-Potentialfeld $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$ wirbelfrei in D.*

(b) Nach dem Satz von Schwarz gilt für ein C^1-Potentialfeld $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $v_1, v_2, \ldots, v_n : D \to \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\vec{v}\,'(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = \vec{v}\,'(\vec{x})^T, \quad \vec{x} \in D,$$

dh für alle $j, k = 1, \ldots, n$ ist

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \text{auf } D.$$

Satz 3.4.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:*

(i) $\vec{v}$ ist Potentialfeld in G.

(ii) Für je zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in G$ ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unabhängig von der Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = \vec{x}$, $\gamma(b) = \vec{y}$.

(iii) Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Satz 3.4.2. *Ist G einfach zusammenhängend und $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, so ist außerdem äquivalent:*

(iv) Für alle $j, k = 1, \ldots, n$ gilt: $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ auf G (Verträglichkeitsbedingung).

Für $G \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt also, ist G einfach zusammenhängend und ist $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ in G, so ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld in G.

Beispiele: (1) Sei $\vec{v}(x,y) = \binom{2xy}{x^2+1}$ auf $G := \mathbb{R}^2$. G ist einfach zusammenhängend. Hier gilt

$$\partial_y v_1 = \partial_y(2xy) = 2x = \partial_x(x^2+1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Nach Satz 3.4.2 ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$. Berechnung eines Potentials f etwa durch den Ansatz:

$$f(x,y) = \int v_1(x,y)\,dx + \phi(y) = \int 2xy\,dx + \phi(y) = x^2y + \phi(y).$$

Nun muss $\partial_y(x^2y + \phi(y)) = v_2(x,y) = x^2 + 1$ sein, also $x^2 + \phi'(y) = x^2 + 1$, dh $\phi'(y) = 1$ und etwa $\phi(y) = y$. Ein Potential f auf $\mathbb{R}^2$ ist also gegeben durch $f(x,y) = x^2y + y$.

(2) Sei $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist $\vec{w}$ ein C^1-Vektorfeld, das die Bedingung (iv) erfüllt: Es ist

$$\partial_y w_1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x w_2.$$

Für die geschlossene Kurve γ aus Beispiel 3.2(3) gilt aber

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Also ist $\vec{w}$ nach Satz 3.4.1 kein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

Auf z.B. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (was einfach zusammenhängend ist) ist $\vec{w}$ aber nach Satz 2 ein Potentialfeld und $f(x,y) := \arctan(y/x)$ definiert ein Potential.

3.5 Integration über Teilmengen im $\mathbb{R}^2$

Sei $R := [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Man erklärt Integrierbarkeit und Integral für beschränkte Funktionen $f : R \to \mathbb{R}$ ähnlich wie in HMI, indem man Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$ und die daraus resultierenden

Zerlegungen $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ von R betrachtet. Ist f integrierbar, schreiben wir

$$\iint\limits_R f(x,y)\, d(x,y)$$

für das Integral.

Satz 3.5.1. *Sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\iint\limits_R f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy.$$

Beispiel:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\, d(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^1 xy\, dy \Big)\, dx = \int_0^1 \Big[x\frac{y^2}{2} \Big]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = \Big[\frac{x^2}{4} \Big] = \frac{1}{4}.$$

Bemerkung: Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f über B integrierbar, falls es ein Rechteck R gibt mit $B \subseteq R$ und die Funktion $f_0 : R \to \mathbb{R}$, $f_0(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in B \\ 0 & ,(x,y) \notin B \end{cases}$, integrierbar ist. Man setzt

$$\iint\limits_B f(x,y)\, d(x,y) = \iint\limits_R f_0(x,y)\, d(x,y).$$

Satz 3.5.2. *Ist $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, wobei*

$$B := \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

und $c, d : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so ist f über B integrierbar und

$$\iint\limits_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \Big)\, dx.$$

Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht werden, dh für Mengen

$$C = \{(x,y) : y \in [c,d], x \in [a(y), b(y)]\},$$

wobei $a, b : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig sind. Es ist dann

$$\iint\limits_C f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \Big(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

Beispiele: (1) Sei $B := \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint\limits_B x\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy\, dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = \Big[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Sei $B := \{(x,y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_{-1}^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \Big)\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt von B.

Bemerkung 3.5.1. *(a) In Satz 3.5.2 ist B **abgeschlossen**. Integriert man nur über die **offene** Menge*

$$\operatorname{inn}(B) := \{(x,y) : a < x < b, c(x) < y < d(x)\},$$

(das <u>Innere von B</u>), so ändert sich das Integral nicht (f ist aber als stetig auf B vorausgesetzt!).

(b) Lässt sich eine abgeschlossene Menge A schreiben als $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, wobei jedes A_j von der Form der obigen Mengen B oder C ist und $\operatorname{inn}(A_1), \operatorname{inn}(A_2), \ldots, \operatorname{inn}(A_n)$ paarweise disjunkt sind, so gilt für stetiges $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_A f(x,y)\, d(x,y) = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} f(x,y)\, d(x,y).$$

(c) Wir werden im folgenden über <u>Gebiete</u> $G \subseteq \mathbb{R}^n$ integrieren. Die Funktionen f werden stetig sein auf

$$\overline{G} := G \cup \partial G,$$

wobei ∂G (der <u>Rand von G</u>) die Menge aller <u>Randpunkte von G</u> ist. Dabei heißt ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ <u>Randpunkt von G</u>, falls $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ und $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0$ ("in jeder Umgebung von $\vec{x}$ liegen Punkte aus G und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus G$"). Die Menge $\overline{G}$ ist abgeschlossen.

Beispiele: Es gilt etwa $\partial K(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = r\}$ und $\partial(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$. Für $G = \operatorname{inn}(B)$ von oben gilt

$$\partial G = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in \{c(x), d(x)\}\} \cup \{(a,y) : y \in [c(a), d(a)]\} \cup \{(b,y) : y \in [c(b), d(b)]\}.$$

3.6 Gaußscher Integralsatz/Satz von Green im $\mathbb{R}^2$

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend. Wie nehmen an, dass der Rand ∂G von G die Spur einer einfach geschlossenen regulären Kurve γ ist. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt" (positive orientierte Kurve). In dieser Situation schreibt man statt $\oint_\gamma$ suggestiv auch $\oint_{\partial G}$.

Satz: (Gauscher Integralsatz oder Satz von Green) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{G} \subseteq D$ und $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \, d\vec{s} = \iint\limits_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)) \, d(x,y).$$

Bemerkung: γ muss nicht überall differenzierbar sein, Stückweise differenzierbarkeit von γ reicht. Das wird ausfürlicher, in der Vorlesung erklärt werden.

Bemerkung: Manchmal wird auch $\oint_{\partial G} v_1(x,y)\, dx + v_2(x,y)\, dy$ statt $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ geschrieben.

Wir betrachten den Fall eines offenen Rechtecks $G = (0,b) \times (0,d)$ und parametrisieren die vier Seiten jeweils durch die Bogenlänge. Dann ist

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \, d\vec{s} &= \int_0^b v_1(x,0)\, dx + \int_0^d v_2(b,y)\, dy - \int_0^b v_1(x,d)\, dx - \int_0^d v_2(0,y)\, dy \\
&= \int_0^d \underbrace{v_2(b,y) - v_2(0,y)}_{= \int_0^b \partial_1 v_2(x,y)\, dx} \, dy - \int_0^b \underbrace{v_1(x,d) - v_1(x,0)}_{= \int_0^d \partial_2 v_1(x,y)\, dy} \, dx \\
&= \iint\limits_G \Big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) \Big) \, d(x,y).
\end{aligned}$$

Beispiel: Sei $\vec{v}(x,y) = (y^2, 3xy)$ und $G = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ berechnen Sie $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Lösung: Wegen des Gaußschen Integralsatzes gilt $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$. Den Bereich G kann gegeben durch $G = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Ferner, $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 3y - 2y = y$. Also

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

3.7 Fluss in $\mathbb{R}^2$

Seien G, ∂G, D wie in 3.6 und sei $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Der Rand ∂G sei parametrisiert durch eine reguläre Kurve $\gamma(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$, $a \le t \le b$. Dann ist $\gamma'(t) = \binom{x'(t)}{y'(t)}$. Sei $\vec{N}(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\binom{y'(t)}{-x'(t)}$. Da G "links von γ" liegt, ist $\vec{N}(t)$ senkrecht auf ∂G und nach außen gerichtet (äußere Einheitsnormale oder äußerer Normaleneinheitsvektor). Das Kurven Integral

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds$$

heißt der Fluss des Vektorfeldes durch ∂G. In diesem Integral wird der Anteil des Vektorfeldes $\vec{w}$ in äußerer Normalenrichtung aufintegriert.

3.8 Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$

Seien G, ∂G, D, N, wie in 3.7. Dann

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds = \iint\limits_G \operatorname{div} \vec{w}\; d(x, y).$$

Bemerkung: γ muss nicht überall stetig differenzierbar sein stückweise stetig differenzierbar reicht.

Beweis. Setzt man $\vec{v} := \binom{-w_2}{w_1}$, so erhält man aus 3.6: Wegen $v_1 = -w_2$ und $v_2 = w_1$ ist nämlich

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds$$

und $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2$. □

Wichtige Bemerkung: Aus diesem Satz folgt: Die Divergenz $\nabla \cdot \vec{w}$ ist ein Maß für die Quelldichte des Vektorfeldes.

Insbesondere gilt: Ist $\vec{w}$ quellenfrei in D (dh $\nabla \cdot \vec{w} = 0$ in D), so ist $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds = 0$ für alle G wie in 3.6 mit $\overline{G} \subseteq D$ (und umgekehrt).

Beispiel: Sei $r > 0$ und $G := \{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2\}$. Wir parametrisieren $\partial G = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ durch $\gamma(t) := \binom{r\cos t}{r\sin t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Anhand einer Skizze ist klar, dass $\vec{N}(\gamma(t)) = \binom{\cos t}{\sin t}$ bzw. $\vec{N}(x, y) = \binom{x/\sqrt{x^2+y^2}}{y/\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x, y) \in \partial G$.

$\Big[$ Parametrisieren wir nach der Bogenlänge, so ist $\vec{\gamma}(s) = \binom{r\cos(s/r)}{r\sin(s/r)}$, $s \in [0, 2\pi r]$, und $\vec{\gamma}\,'(s) = \vec{T}(s) = \binom{-\sin(s/r)}{\cos(s/r)}$, sowie $\vec{N}(s) = \binom{\cos(s/r)}{\sin(s/r)}$ $\Big]$.

Das Vektorfeld sei gegeben durch $\vec{w}(x,y) = \binom{xy}{2y}$. Dann gilt $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds &= \iint\limits_G \nabla \cdot \vec{w}\, d(x,y) = \iint\limits_G (y+2)\, d(x,y) \\
&= \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (y+2)\, dy\, dx = 4 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Wir substituieren $x = r\xi$, $dx = r\, d\xi$ und erhalten

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N}\, ds = 4r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \xi^2}\, d\xi = 2\pi r^2.$$

4 Oberflächenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

Wir beschäftigen uns zunächst mit Volumenintegralen im $\mathbb{R}^3$

4.1 Integration über projizierbare Teilmengen von $\mathbb{R}^3$

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ von der folgenden Form:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

wobei $g, h : B_0 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \leq h$ und

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

mit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist dann $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f über B integrierbar und es gilt

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_a^b \Big(\int_{u(x)}^{v(x)} \Big(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, dz \Big)\, dy \Big)\, dx.$$

Bemerkung: (a) Die Rollen von x, y, z können vertauscht werden (vergleiche Satz 2 in 3.5).

(b) Für $f = 1$ erhält man das <u>Volumen</u> $\mathrm{vol}(B)$ <u>von B</u>.

(c) Ähnlicher Satz gilt wenn man integriert über Bereiche von $\mathbb{R}^n$.

Beispiele: (1) Sei $r > 0$ und

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

(Kugel um $\vec{0}$ mit Radius r). Mit $a = -r$, $b = r$, $u(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $v(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $g(x, y) = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$, $h(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ erhalten wir

$$\iiint\limits_B d(x, y, z) = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}} dz\, dy\, dx = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\, dy\, dx.$$

Wir substituieren im inneren Integral $y = \sqrt{r^2 - x^2}\eta$, $dy = \sqrt{r^2 - x^2}\, d\eta$ und erhalten

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\, dy = 2(r^2 - x^2) \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \eta^2}\, d\eta = \pi(r^2 - x^2).$$

Somit ist

$$\mathrm{vol}(B) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \Big[r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

(2) Sei

$$B := \{(x,y,z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Wir berechnen

$$\iiint\limits_B 1\, d(x,y,z) = \int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \Big(\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\, dy \Big)\, dx \Big)\, dz = \int_0^1 \Big(\iint\limits_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq z\}} 1\, d(x,y) \Big)\, dz.$$

Das innere Integral ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $\sqrt{z}$. Dieser Kreis ist der Schnitt durch B mit festgehaltener z-Komponente. Wir erhalten somit

$$\iiint\limits_B 1\, d(x,y,z) = \int_0^1 \pi z\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung (Prinzip von Cavalieri): Für $B \subseteq \mathbb{R}^3$ der Form

$$B = \{(x,y,z) : z \in [a,b], (x,y) \in B(z)\}$$

gilt allgemein

$$\iiint\limits_B d(x,y,z) = \int_a^b \int_{B(z)} d(x,y)\, dz.$$

Hierbei ist $B(z)$ der Schnitt durch B mit festgehaltener z-Komponente.

Bemerkung: Wir werden im folgenden über beschränkte Mengen im $\mathbb{R}^3$ integrieren, die sich in endlich viele Gebiete der Form B (mit eventuell vertauschten Rollen der Koordinaten) zerlegen lassen. Wir nennen solche Mengen Integrationsbereiche.

4.2 Transformationsformel

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (meist ist $n = 2$ oder $n = 3$ und B ein Integrationsbereich) und $U \supseteq B$ ein Gebiet. Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv mit $\det \Phi' \neq 0$ auf U, sowie $A := \Phi(B)$ und $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Bemerkung: Nach 2.12 ist dann auch $V := \Phi(U)$ offen und $\Phi : U \to V$ bijektiv und in beiden Richtungen stetig differenzierbar. Da U ein Gebiet und $\det \Phi' : U \to \mathbb{R}$ stetig ist, gilt außerdem $\det \Phi' > 0$ auf U oder $\det \Phi' < 0$ auf U.

Satz: Es ist f integrierbar über A genau dann, wenn $f \circ \Phi |\det \Phi'(\cdot)|$ über B integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_A f(x)\, dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det (\Phi'(y))|\, dy.$$

Im einfachsten Fall ist $\Phi(x) = Cx + b$, wobei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Nach der "Interpretation" der Determinante als Volumen muss das Volumen eines Quaders $Q \subseteq B$ beim Abbilden mit Φ gerade mit $|\det(C)|$ multipliziert werden. Das ist die Kernidee hinter der Transformationsformel.

4.3 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann findet man Winkel φ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Für $\Phi(r, \varphi) := \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ gilt

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

also $\det\Phi'(r, \varphi) = r$.

Damit Φ injektiv ist, nehme man etwa $U = (0, \infty) \times (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ mit $0 \leq \tilde{\varphi}_1 < \tilde{\varphi}_2 \leq 2\pi$ und $\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 < 2\pi$. Sind $\tilde{\varphi}_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \tilde{\varphi}_2$, $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ und $A := \Phi(B)$, so gilt für stetiges $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_A f(x, y)\, d(x, y) = \iint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d(r, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi.$$

Zusatz: Diese Formel gilt auch für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$, sowie für $R_1 = 0$.

Beispiele: (1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Hier ist $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, also $B = [1, 2] \times [0, \pi]$. Es gilt also für $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} \iint\limits_A y\sqrt{x^2 + y^2}\, d(x, y) &= \iint\limits_B r\sin\varphi\, r r\, d(r, \varphi) = \int_0^\pi \int_1^2 r^3 \sin\varphi\, dr\, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_1^2 r^3\, dr = 2 \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

(2) Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 - z, z \in [0, 4]\}$ und $A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(M) &= \iiint\limits_M 1\, d(x, y, z) = \iint\limits_A \Big(\int_0^{4-(x^2+y^2)} 1\, dz \Big)\, d(x, y) \\ &= \iint\limits_A 4 - (x^2 + y^2)\, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, dr\, d\varphi = 8\pi. \end{aligned}$$

(3) Wir berechnen das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (das war in HM I nicht möglich). Dazu sei $R > 0$ und

$$K_R := \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0,R] \times [0,R]$$

und $\rho := \sqrt{2}R$, sowie $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}$ auf $\mathbb{R}^2$.

Dann gilt

$$\iint\limits_{K_R} f(x,y)\,d(x,y) \leq \iint\limits_{Q_R} f(x,y)\,d(x,y) \leq \iint\limits_{K_\rho} f(x,y)\,d(x,y),$$

$$\iint\limits_{Q_R} f(x,y)\,d(x,y) = \iint\limits_{Q_R} (e^{-x^2} e^{-y^2})\,d(x,y) = \Big(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\Big)^2,$$

$$\iint\limits_{K_R} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

und genauso

$$\iint\limits_{K_\rho} f(x,y)\,d(x,y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-\rho^2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Wir lassen nun $R \to \infty$ und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

4.4 Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

Hier ist $\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = z$. Es gilt

$$\Phi'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r,\varphi,z) = r$. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in 21.3 und stetiges $f : A \to \mathbb{R}$ gilt somit:

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iiint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,d(r,\varphi,z).$$

Der Zusatz aus 4.3 gilt sinngemäß auch hier.

Beispiel: $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \in [0,1]\}$, also $B = [0,1]\times[0,\pi/4]\times[0,1]$. Dann ist für $f(x,y,z) = x^2+y^2+yz$:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A (x^2+y^2+yz)\,d(x,y,z) &= \iiint\limits_B (r^2+zr\sin\varphi)r\,d(r,\varphi,z)\\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (r^2+zr\sin\varphi)r\,dz\,d\varphi\,dr\\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \Big[zr^3 + \frac{z^2}{2}r^2\sin\varphi\Big]_{z=0}^{z=1} d\varphi\,dr\\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^3 + \frac{r^2}{2}\sin\varphi\,d\varphi\,dr\\
&= \int_0^1 \frac{\pi}{4}r^3 + \frac{r^2}{2}[-\cos\varphi]_0^{\pi/4}\,dr = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

4.5 Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

Man schreibt $r = \|(x,y,z)\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ und

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta\\ r\sin\varphi\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

wobei $r \geq 0$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\vartheta \in [0,\pi]$. Es ist

$$\Phi'(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta\\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also $\det\Phi'(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta$.

Sind A und B wie in 4.2, also $A = \Phi(B)$, und ist $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iiint\limits_B f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)r^2\sin\vartheta\,d(r,\varphi,\vartheta).$$

Der Zusatz in 4.3 gilt entsprechend.

Beispiel: Sei $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x,y,z \geq 0\}$. Dann ist $B = [0,1]\times[0,\pi/2]\times$

$[0,\pi/2]$, und für $f(x,y,z) = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_A x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z) &= \iiint\limits_B r\cos\varphi\sin\vartheta\cdot r\cdot r^2\sin\vartheta\,d(r,\varphi,\vartheta)\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin^2\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta\\
&= \int_0^1 r^4\,dr\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi}_{=1}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta}_{=\pi/4} = \frac{\pi}{20}.
\end{aligned}$$

4.6 Flächendarstellungen im $\mathbb{R}^3$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Flächen im $\mathbb{R}^3$ darzustellen.

Explizite Darstellung: $z = f(x,y)$, z.B. $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix} : (x,y)\in U\right\},$$

wobei $U\subseteq\mathbb{R}^2$ Gebiet und $f\in C^1(U,\mathbb{R})$.

Implizite Darstellung: $F(x,y,z)=0$, z.B. $x^2+y^2+z^2-1=0$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in D : F(x,y,z)=0\right\},$$

wobei $D\subseteq\mathbb{R}^3$ Gebiet und $F\in C^1(D,\mathbb{R})$. Hierbei sei $\nabla F(x,y,z)\neq\vec{0}$ für $(x,y,z)\in\mathcal{F}$. Diese Bedingung sorgt dafür, dass man lokal immer nach einer der Variablen x, y oder z auflösen kann (vgl. 2.13).

Parameterdarstellung: Beispiel

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} : \varphi\in(0,2\pi),\vartheta\in(0,\pi)\right\},$$

allgemein

$$\mathcal{F} = \{\vec{g}(u,v) : (u,v)\in U\},$$

wobei $U\subseteq\mathbb{R}^2$ Gebiet und $\vec{g}\in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ **injektiv** ist mit $\operatorname{Rang}\vec{g}\,'(u,v) = 2$ für alle $(u,v)\in U$ (beachte $\vec{g}\,'(u,v)\in\mathbb{R}^{3\times 2}$). Ein solches $\mathcal{F}$ heißt <u>reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$</u> und $\vec{g}$ heißt <u>reguläre Parametrisierung</u> von $\mathcal{F}$.

Bemerkung: Durch $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ kommt man von einer expliziten zu einer impliziten Darstellung. Die explizite Darstellung ist ein Spezialfall der Parameterdarstellung via

$$\vec{g}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in U.$$

Normaleneinheitsvektor: Ist $\mathcal{F}$ ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$, so gibt es in jedem Punkt auf der Fläche genau zwei Vektoren, die auf der Fläche senkrecht stehen und die Länge 1 haben. Sie sind entgegengesetzt gerichtet und heißen Normaleneinheitsvektor. Die Entscheidung für einen der beiden legt die Orientierung des Flächenstücks fest.

Häufig wird verlangt, dass $\vec{N}$ "nach außen" zeigt, was aber voraussetzt, dass es überhaupt "innen" und "außen" gibt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall.

Im folgenden betrachten wir $\vec{N}$ als Abbildung $\mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$.

In Parameterdarstellung ist

$$\vec{N}(\vec{g}(u,v)) = \pm \frac{\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)}{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}, \quad (u,v) \in U.$$

Wir verwenden, wenn nichts anderes gesagt wird, hier das **positive** Vorzeichen.

In impliziter Darstellung $F(x,y,z) = 0$ ist der Normaleneinheitsvektor

$$\vec{N}(x,y,z) = \pm \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}, \quad (x,y,z) \in \mathcal{F}$$

(beachte, dass man statt F ebenso $-F$ verwenden kann). Das liegt daran, dass der Gradient von F senkrecht auf der Niveaufläche steht.

Für die explizite Darstellung $z = f(x,y)$ erhalten wir

$$\vec{N}(x,y,f(x,y)) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in U$$

(beachte, dass $\partial_x \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}$, $\partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}$ und $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$ ist).

4.7 Oberflächenintegral

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre (insbesondere also injektive) Parametrisierung eines Flächenstücks. Dann heißt

$$do := \|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\| \, d(u,v)$$

skalares Oberflächenelement , und

$$d\vec{o} := \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\, d(u,v)$$

heißt vektorielles Oberflächenelement des durch $\vec{g}$ parametrisierten regulären Flächenstücks.

Definition: Sei $B \subseteq U$ ein Integrationsbereich und $\mathcal{F} := \vec{g}(B)$. Für ein stetiges Skalarfeld $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definiert man das (Oberflächen-)Integral von f über $\mathcal{F}$ durch

$$\iint_{\mathcal{F}} f\, do := \iint_{B} f(\vec{g}(u,v))\, \|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|\, d(u,v),$$

und für ein stetiges Vektorfeld $\vec{w} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ setzt man

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} := \iint_{B} \vec{w}(\vec{g}(u,v)) \cdot \Big(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\Big)\, d(u,v).$$

Für $f = 1$ erhält man den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$:

$$A(\mathcal{F}) := \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_{B} \|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|\, d(u,v).$$

Bemerkung: Die Definitionen sind invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Bemerkung: Wenn wir das vektorielle Oberflächenelement mit dem skalaren Oberflächenelement vergleichen und – wie in 4.6 gesagt – für $\vec{N}$ das positive Vorzeichen nehmen, dh

$$\vec{N}(\vec{g}(u,v)) = \frac{\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)}{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|},$$

so ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do,$$

das ist der **Fluss** des Vektorfelds $\vec{v}$ durch die mittels $\vec{N}$ orientierte Fläche $\mathcal{F}$.

Beispiel: Wir berechnen den Flächeninhalt einer oberen Halbkugel

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \le R^2 \}$$

mit Radius $R > 0$. Wir haben eine explizite Darstellung mit $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$. Es ist $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $-\partial_x f = x/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $-\partial_y f = y/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Wir setzen $B := \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Somit ist

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint_B \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1}\, d(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi R^2 \int_0^1 \rho \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \\
&= 2\pi R^2 \Big[-\sqrt{1-\rho^2} \Big]_0^1 = 2\pi R^2.
\end{aligned}
$$

4.8 Der Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks $\mathcal{F}^* := \vec{g}(U)$.

Sei $G \subseteq U$ ein Gebiet so, dass $\overline{G}$ ein Integrationsbereich ist. Der Rand ∂G von G bestehe aus endlich vielen regulären Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, dh $\gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ (im Sinne von Bemerkung 3.1(d)) ist doppelpunktfrei und hat ∂G als Spur. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt" (dh ∂G ist positiv orientiert) .

Sei $\mathcal{F} := \vec{g}(G)$. Dann ist $\partial\mathcal{F} := \vec{g}(\partial G)$ parametrisiert durch $\vec{g} \circ \gamma$.

Satz: Ist nun $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $\mathcal{F} \subseteq V$ und $\vec{v} : V \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld, so gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}.$$

Nach 3.2 können wir die linke Seite auch schreiben als

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{T}\, ds,$$

wobei $\vec{T} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ der Tangenteneinheitsvektor ist, hier gegeben durch

$$\vec{T}(\vec{g}(\gamma(t))) = \frac{\vec{g}\,'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{\|\vec{g}\,'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\|},$$

und die rechte Seite können wir schreiben als

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N}\, do.$$

Alternativ: Ist $\vec{T}$ auf $\partial\mathcal{F}$ gegeben (und damit die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ festgelegt), so sei im Punkt $P \in \partial\mathcal{F}$ der Vektor $\vec{n}$ der Vektor der Länge 1, der in der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in P senkrecht auf $\vec{T}$ steht und ins Äußere von $\mathcal{F}$ weist. Die Richtung von $\vec{N}$ ist dann diejenige von $\vec{n} \times \vec{T}$.

Anders ausgedrückt: Die Orientierung von $\vec{N}$ auf $\mathcal{F}$ ergibt sich aus der Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ im Sinne der “Rechtsschraubenregel”. Man vergleiche hierzu auch die ebene Version des Stokesschen Integralsatzes in 3.7!

Beispiele: (1) Sei $\mathcal{F} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Dann ist $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. Orientieren wir $\partial\mathcal{F}$ durch $\vec{T}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir $\vec{N}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für $(x, y, z) \in \mathcal{F}$.

Wir wollen

$$J := \iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot\, d\vec{o}$$

berechnen, wobei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sei.

Nach dem Stokesschen Satz ist

$$J = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\cos t, \sin t, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Für $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + z \\ z - x \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$J = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Hier ist übrigens $\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Sei G ein Integrationsbereich im $\mathbb{R}^2$ mit einer aus endlich vielen regulären Kurven zusammengesetzten doppelpunktfreien Randkurve. Dann gilt für die Fläche $A(G)$ von G:

$$A(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}.$$

(Man bette G in den $\mathbb{R}^3$ ein und beachte $\vec{N} = \vec{e}_3$ und $\left(\nabla \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{e}_3 = 2$.)

(3) Anwendung von (2): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$G = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in (\alpha, \beta), r \in (0, r(t))\}.$$

Dann gilt die Leibnizsche Sektorformel:

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 \, dt.$$

(Die Integrale über die Strecken $[(0,0), (r(\alpha) \cos \alpha, r(\alpha) \sin \alpha)]$ und $[(0,0), (r(\beta) \cos \beta, r(\beta) \sin \beta)]$ verschwinden, das Integral über $\gamma(t) = \binom{r(t) \cos t}{r(t) \sin t}$, $t \in [\alpha, \beta]$ rechne man aus.)

(4) Beispiel (2) legt nahe, $A(\mathcal{F})$ auch für gekrümmte Flächen durch

$$A(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot \, d\vec{s}.$$

berechnen zu können, wobei $\vec{v}$ ein C^1-Vektorfeld mit $(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} = 1$ auf $\mathcal{F}$ ist. Dann sollte aber $\nabla \times \vec{v} = \vec{N}$ auf $\mathcal{F}$ sein und somit insbesondere $\nabla \cdot \vec{N} = 0$.

Ist jedoch z.B. $\mathcal{F}$ die obere Halbkugel mit Radius 1, dann ist $\nabla \cdot \vec{N} = 3$. Also findet man hier kein geeignetes Vektorfeld $\vec{v}$.

4.9 Der Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränkter und abgeschlossener Integrationsbereich und $G := B \setminus \partial B$ ein Gebiet mit $\partial G = \partial B$ (dann ist $\overline{G} = B$). Der Rand ∂G lasse sich zerlegen in endlich viele reguläre Flächenstücke. Die Einheitsnormale $\vec{N}$ auf ∂G sei ins Äußere von G gerichtet.

Satz: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $\overline{G} \subseteq V$ und $\vec{v} : V \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint\limits_{G} \nabla \cdot \vec{v} \, d\tau = \iint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do,$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben.

Beispiele: (1) Für $\vec{v} \in C^2(V, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\iint\limits_{\partial G} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \, d\vec{o} = 0,$$

da ja $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ in G. Nach 4.8 ist das nicht verwunderlich, da die Oberfläche ∂G von G ja geschlossen ist und selbst keinen (Flächen-)Rand hat.

(2) Für $f \in C^2(V)$ gilt

$$\iiint\limits_G \Delta f \, d\tau = \iint\limits_{\partial G} \nabla f \cdot d\vec{o} = \iint\limits_{\partial G} \nabla f \cdot \vec{N} \, do = \iint\limits_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do.$$

(3) **Greensche Formeln** Für $f, g \in C^2(V, \mathbb{R})$ und $h \in C^1(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$\iint\limits_{\partial G} h \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do = \iiint\limits_G \Big(h\Delta f + \nabla h \cdot \nabla f \Big) \, d\tau,$$

$$\iint\limits_{\partial G} \Big(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \Big) \, do = \iiint\limits_G \Big(g\Delta f - f\Delta g \Big) \, d\tau.$$

(4) Setzt man $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$, so gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 3$, und wir erhalten

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint\limits_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{N} \, do.$$

Für $G = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| < R\}$ ist also wegen $\vec{N} = \vec{x}/\|\vec{x}\|$:

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint\limits_{\partial G} \|\vec{x}\| \, do = \frac{R}{3} \underbrace{A(\partial G)}_{=4\pi R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

(5) Wir setzen $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ und $\vec{v} = \nabla f$. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \Big(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \cdot (2x_j) \Big)_j = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \\ \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}) &= -\sum_{j=1}^{3} \Big(\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} - 3\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^5} \Big) = 0 \end{aligned}$$

für $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Nach dem Divergenzsatz ist also für G mit $0 \notin \overline{G}$:

$$\iint\limits_{\partial G} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot d\vec{o} = 0.$$

Wir halten außerdem fest, dass

$$\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(6) Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer Kugel G um $\vec{0}$ mit Radius R. Wir wollen

$$\iiint\limits_{G} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta\varphi \, d\tau = -4\pi\varphi(\vec{0})$$

zeigen. Da der Integrand für $\vec{x} \to 0$ nicht beschränkt bleiben muss, verstehen wir unter der linken Seite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta\varphi \, d\tau,$$

wobei $G_\varepsilon := G \setminus \{\|\vec{x}\| \leq \varepsilon\}$. Für festes $\varepsilon \in (0, R)$ ist jetzt nach der zweiten Greenschen Formel und nach (5):

$$\iiint\limits_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta\varphi \, d\tau = \int_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, do - \int_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, do.$$

Dabei beachte man, dass für $\|\vec{x}\| = \varepsilon$ gilt: $\vec{N} = -\vec{x}/\varepsilon$. Also ist

$$-\int_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, do = -\varepsilon^{-2} \int_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \varphi \, do \to -4\pi\varphi(0) \quad (\varepsilon \to 0).$$

Andererseits ist $\|\nabla\varphi\| \leq K$ für eine geeignete Konstante K und daher

$$\Big| \int_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, do \Big| \leq \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon} K \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Interpretation: Es gilt "$\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = -4\pi\delta_{\vec{0}}$", wenn wir gegen C^2-Funktionen ϕ integrieren, die außerhalb einer Kugel $G = K(\vec{0}, R)$ verschwinden. Dabei setzt man für solche ϕ:

$$\iiint\limits_{G} \Big(\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|}\Big) \phi \, d\tau := \iiint\limits_{G} \frac{1}{\|\vec{x}\|} (\Delta\phi) \, d\tau,$$

was durch die zweite Greensche Formel in (3) oben gerechtfertigt ist (die Randterme verschwinden), und definiert

$$\iiint\limits_{G} \phi \delta_{\vec{0}} \, d\tau := \phi(\vec{0}),$$

dh $\delta_{\vec{0}}$ ist formal als eine “Dichte” mit Integral 1 zu verstehen, die im Punkt $\vec{0}$ konzentriert ist.

Bemerkung: Ähnlich kann man im $\mathbb{R}^2$ zeigen, dass für $g(x,y) := -\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$ gilt: $\Delta g = \delta_{(0,0)}$.

Index