Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2017
18.09.2017

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie die Matrix $S^{-1}AS$ an. Zeigen Sie darüber hinaus, dass für alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0.$$

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := e^{2xe^y - 2}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt $(1,0)$. Approximieren Sie damit den Funktionswert $f(1.1, 0.2)$. Hat f lokale Extremstellen?

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)

a) Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - x + 2y, \qquad g(x,y) := x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leqslant \frac{5}{16}\}$.

b) Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2/\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

und $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

Ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{w}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 + (2a-1)y \\ a^2x + 2y \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist und für dieses a bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $f(t,x)=0$, wobei $f(t,x)=x^4(t+1)+x^3+t^2x^2-8$, in einer Umgebung des Punktes $(2,1)\in\mathbb{R}^2$ nach x auflösbar ist. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $x(t)$ die Ableitung $x'(2)$.

b) Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2\int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy.$$

Skizieren Sie den Integrationsbereich vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

c) Betrachten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^5+y^5}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig in $(0,0)$ ist. Untersuchen Sie f in $(0,0)$ auf partielle Differenzierbarkeit bezüglich x und berechnen Sie gegebenenfalls $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

a) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z):=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\ -2xy\\ \frac{z^2}{2}+x\end{pmatrix}$$

sowie sie Menge $A\in\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 3,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂A, genauer, das Integral $\iint_{\partial A}\vec{v}\cdot d\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=1-x^2-y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab **19.10.2017** im Internet auf der Seite des Campussystems und neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30).

Die Klausureinsicht findet am Mittwoch, den **25.10.2017**, von 16 bis 18 Uhr im Fasanengarten Hörsaal (Geb.50.35) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **30.10.2017** bis **03.11.2017**.

(1a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2) - 4 =$

$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$. Also sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ die Eigenwerte von A.

$(A-I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_2 = -2v_1 \Leftrightarrow \vec{v} \in \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

$(A-6I)\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow w_1 = 2w_2 \Leftrightarrow \vec{w} \in \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Also $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sind die Mengen aller Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 bzw. 6.

Also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\quad\vec{v} \quad \vec{w}$

Da A symmetrisch ist und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ist A positiv definit. Deshalb gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(1b) $f(1,0) = e^{2\cdot 1 e^0 - 2} = e^0 = 1$.

$f_x(x,y) = 2e^y e^{2xe^y - 2} \Rightarrow f_x(1,0) = 2e^0e^0 = 2$.

$f_y(x,y) = 2xe^y e^{2xe^y - 2} \Rightarrow f_y(1,0) = 2e^0e^0 = 2$.

Also das Polynom lautet

$$f(1,0) + f_x(1,0)h_1 + f_y(1,0)h_2 = 1+2h_1+2h_2$$

Oder $\quad 1+2(x-1)+2y$.

Die Approximation bekommt man wenn man x, y durch $1{,}1$ bzw 0.2 ersetzt:

$$1+2(1{,}1-1)+2\cdot 0{,}2 = 1+0{,}2+0{,}4 = 1{,}6$$

Da $f_x(x,y) = 2e^y e^{2xe^y-2} \neq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ hat f keine lokale Extremstellen.

(2a) (i) kritische Punkte von f:

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, -1\right).$$

Aber $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 > \frac{5}{16}$ also liegt $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ außerhalb der Menge A.

Jetzt untersuchen wir f auf ∂A mit der Multiplikationsregel von Lagrange:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-1 = \lambda 2x \\ 2y+2 = \lambda 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 1 \\ 2y(1-\lambda) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2(1-\lambda)} \wedge y = -\frac{1}{1-\lambda} \right).$$

($\lambda \neq 1$ weil $\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y)$ unmöglich ist).

Adere auf ∂A $x^2+y^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow$

$$\frac{1}{4(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{5}{4(1-\lambda)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow (1-\lambda) = \pm 2.$$

Also $\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ oder $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Da $f\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{25}{16}$

und $f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{15}{16}$.

ist $\operatorname{Max} f = \frac{25}{16}$ und $\operatorname{Min} f = -\frac{15}{16}$.

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ -\frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) - \cos^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1)\, dt = -2\pi$$

Da γ geschlossen ist und $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} \neq 0$ folgt, dass $\vec{v}$ kein Potentialfeld ist.

(c) $\frac{\partial w_1}{\partial y} = 2a-1$, $\frac{\partial w_2}{\partial x} = a^2$.

da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld.

$\Leftrightarrow \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \Leftrightarrow a^2 = 2a-1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Für $a=1$: $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ x+2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \nabla f \Rightarrow f_x(x,y) = x^2 + y \Rightarrow f = \frac{x^3}{3} + xy + c(y)$

Also $x+2y \overset{!}{=} f_y = x + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 2y$

$\rightsquigarrow c(y) = y^2$. Also ist

$f = \frac{x^3}{3} + xy + y^2$ ein zugehöriges Potential.

Auf (3a) $f_x(t,x) = 4x^3(t+1) + 3x^2 + 2xt^2$ (1)

$f_t(t,x) = x^4 + 2tx^2$ (2)

Also $f(2,1) = 1^4(2+1) + 1^3 + 2^2 \cdot 1^2 - 8 = 0$.

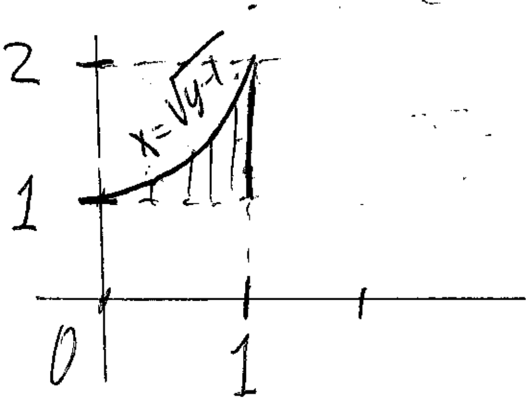
$f_x(t,x) = 4 \cdot 1^2(2+1) + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 23 \neq 0$.

Also ist $f(t,x) = 0$ Satz über die implizit definierten Funktionen auflösbar nach x in einer Umgebung von $(2,1)$. Es gilt dann

$$x'(2) = -\frac{f_t(2,1)}{f_x(2,1)} = -\frac{f_t(2,1)}{23} = -\frac{1^4 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2}{23} = -\frac{5}{23}.$$

(b). $\int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy = \iint_B e^{x^3}\,d(x,y)$

wobei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2,\ \sqrt{y-1} \leq x \leq 1\}$.



untere Grenze $x = \sqrt{y-1}$

Aber $x = \sqrt{y-1} \overset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 = y-1$

$\Longleftrightarrow y = 1 + x^2$.

Aus der Skizze sieht man, dass

$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 1 + x^2$.

Also $\int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^1 e^{x^3} dx\, dy = \int_0^1 \int_1^{1+x^2} e^{x^3} dy\, dx$

$= \int_0^1 e^{x^3}(x^2+1-1)\, dx = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$

$= \left. \frac{e^{x^3}}{3} \right|_0^1 = \frac{e-1}{3}.$

(c) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^5+|y|^5}{x^4+y^4} = \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^4}}_{\leq 1} |x| + \underbrace{\frac{y^4}{x^4+y^4}}_{\leq 1} |y|$$

Da $x^4 \leq x^4+y^4$ da $y^4 \leq x^4+y^4$

$\Rightarrow |f(x,y)| \leq |x|+|y| \longrightarrow 0$ wenn $(x,y) \to (0,0)$

Also $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Also ist f stetig in $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}-0}{x-0} = 1.$$

Also ist f partiel Differenzierbar nach x in $(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.

(4a) $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2}{2}+x\right)$

$= 2x - 2x + z = z.$

Also $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{n} = \iiint_A \operatorname{div} \vec{v} \, d(x,y,z).$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ y \geq 0,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}.$

Kugelkoordinaten:

$0 \leq r \leq \sqrt{3}$ $\quad \varphi \in [0,\pi].$

(da $\sin\varphi \geq 0$ auf $[0,2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\varphi \in [0,\pi]$).

$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow r\cos\theta \geq r\sin\theta \xLeftrightarrow[\text{wenn } \cos\theta \geq 0]{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$

$\tan\theta \leq 1$ (oder $r=0$ aber das wäre nur ein Punkt).

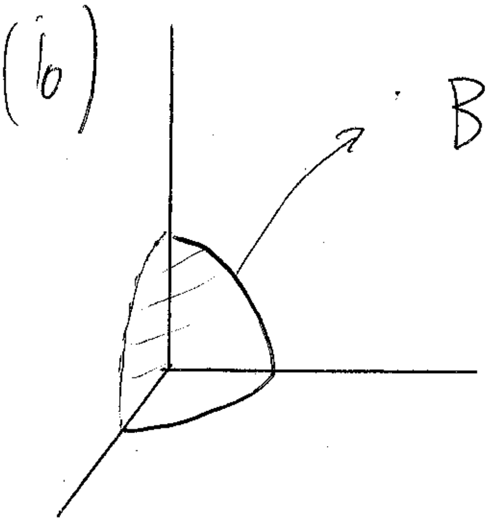
$\Leftrightarrow$ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$ Also

$\iiint_A \operatorname{div} \vec{v} = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$

$= \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \cdot \pi =$

$$\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}} \cdot 2\pi \quad \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{4} \cdot \pi \, \frac{1}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$

(b)



$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\}.$$

$$z \geq 0 \iff 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 1.$$

Also $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, \; (x,y) \in C\}$

wobei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Also $B = \{\vec{u}(x,y) : (x,y) \in C\}$

$$\vec{u}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

$$F(B) = \iint_B 1 \, do = \iint_C \|\vec{u}_x \times \vec{u}_y\| \, d(x,y).$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also $F(B) = \iint_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, d(x,y)$

Da aber $C = \{(r,\varphi): 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$. bekommen wir

$$\mathcal{F}(B) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+4r^2}\, r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+4r^2}}_{u}\, \underbrace{r\,dr}_{\frac{du}{8}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^5 \sqrt{u}\, \frac{du}{8} = \frac{\pi}{16} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \frac{\pi}{24} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$