Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

SS 2017
22.09.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung alte Prüfungsordnung

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^x$$

an.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + xy' + y &= x^2, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Aufgabe 2 (5+ (1 + 4)=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 2y' &= y - xy^3, \quad x > 0, \\ y(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A durch $p_A(\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$ gegeben ist.

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

— bitte wenden —

AUFGABE 3 (3+7=10 PUNKTE)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t - 2u_x = e^{x+t}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = \cos(x).$$

b) Geben Sie alle Funktionen $u : [0,1] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,1), t > 0,$$

an, die die Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen und die Randbediengungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

für alle $t > 0$ erfüllen.

AUFGABE 4 (3+2+5=10 PUNKTE)

a) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^{tB} über die Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion.

Hinweis: Benutzen Sie die Potenzreihen von e^t und e^{-t}.

b) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$y'' = x' + 2y + 3y'$$
$$x'' = y' - x' - 2x,$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Hier $x = x(t), y = y(t)$ sind Funktionen von t. Sie müssen das System nicht lösen.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0 \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist $y = e^x$.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **19.10.2017**, neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter auf dem Campussystem veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **25.10.2017**, von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **30.10.2017** bis **03.11.2017** statt.

Aufgabe 1

a) Es handelt sich um eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das char. Pol. lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

mit einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = \underline{\underline{C_1}}\, e^x + \underline{\underline{C_2}}\, e^{2x}$$

Die rechte Seite ist die Summe zweier Terme, die uns jeweils einen Ansatz für die spezielle Lösung liefern. Für x ist dies

$$y_{p,1}(x) = Ax + B,$$

da 0 keine Nullstelle des char. Pol. ist. Für e^x ist es

$$y_{p,2}(x) = Cxe^x,$$

da 1 eine einfache Nullstelle ist. Dies liefert

$$y_p(x) = Ax + B + Cxe^x,$$

$$y_p'(x) = A + C(x+1)e^x,$$

$$y_p''(x) = C(x+2)e^x.$$

Einsetzen liefert

$$x + e^x \overset{!}{=} y_p'' - 3y_p' + 2y_p = C(x+2)e^x - 3A$$

$$- 3C(x+1)e^x + 2Ax + 2B + 2Cxe^x$$

$$= (2B - 3A) + 2Ax - Ce^x,$$

woraus $C = -1$, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$ folgt. Die allg. Lsg. lautet demnach

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - xe^x.$$

b) Wir wählen den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Einsetzen liefert

$$x^2 \overset{!}{=} y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n \right] \cdot x^n.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(1) \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)} \qquad (n \neq 2)$$

$$(2) \quad 12 a_4 + 3 a_2 = 1 \qquad (n = 2)$$

Die Anfangswerte liefern

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

Mit (1) folgt nun

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = 0, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3} = 0.$$

Mit (2) folgt dann $a_4 = \frac{1}{12}$ und mit (1) wiederum $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k} = \frac{a_{2k-4}}{2k(2k-2)} = \frac{(-1)^2}{2^2} \frac{a_{2k-4}}{k(k-1)}$$

$$= \ldots = \frac{(-1)^{k-2}}{2^{k-2}} \frac{a_4}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 3} = \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1} \cdot k!} \quad (k \geq 2)$$

Die Lösung lautet also

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1} \cdot k!} x^{2k} = \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}$$

$$= \frac{2}{3} e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 2

a) Wir multiplizieren die Gleichung mit y^{-3} und definieren $z := y^{-2}$. Dann gilt

$$z' = -2y^{-3}y' \overset{\text{DGL}}{=} -y^{-2} + x = -z + x$$

Der Anfangswert wird zu $z(0) = (y(0))^{-2} = 4$.
Nun folgt

$$A(x) = \int_0^x -1 \, dt = -x,$$

womit für die Lösung laut Formel

$$z(x) = 4e^{-x} + e^{-x}\int_0^x \underset{u'}{e^t} \cdot \underset{v}{t} \, dt$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} 4e^{-x} + e^{-x}\left[\left[e^t \cdot t\right]_0^x - \int_0^x e^t \, dt\right]$$

$$= 4e^{-x} + e^{-x}\left[e^t(t-1)\right]_0^x$$

$$= 4e^{-x} + e^{-x}\left[e^x(x-1) + 1\right]$$

$$= 5e^{-x} + (x-1)$$

Für $x > 0$ gilt $z(x) > 0$, denn

$$z(x) \geq \left\{\begin{matrix} 5e^{-1} - 1, & x \in (0,1] \\ (x-1), & x > 1 \end{matrix}\right\} > 0$$

Resubstitution liefert

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}} \quad \text{oder} \quad y(x) = -\frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}}$$

Da aber $y(0) = \frac{1}{2} > 0$ ist die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}}, \quad x > 0.$$

b) Wir berechnen das char. Polynom der Matrix, also

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 4 \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 5-\lambda^2 & 4(1-\lambda) \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw.}}{=}} -\det\begin{pmatrix} 5-\lambda^2 & 4(1-\lambda) \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(5-\lambda^2)(1-\lambda) + 4(1-\lambda)$$

$$= -(1-\lambda)(1-\lambda^2) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Die Eigenwerte sind also -1 (einfach) und 1 (2-fach).

Für -1 gilt

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \underset{-1}{\cancel{0}} \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

was die erste Lösung $\vec{\Phi}_1(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$ liefert.

Für 1 gilt

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{-1}{\cancel{0}} \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

sowie

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -24 \\ -2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \underset{-1}{\cancel{0}} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{+1}{\cancel{0}} \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\underset{\text{alt}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\text{neu}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\}$$

Dies liefert die restlichen Lsg. $\vec{\Phi}_2(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$ und

$$\vec{\Phi}_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + x e^x \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4x \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x.$$

Aufgabe 3

a) Die linke Seite der Gleichung entspricht

$$(\nabla u)(x,t)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},$$

was die Ableitung der Funktion $w(s)=u(x-2s,t+s)$ ist wegen der Kettenregel:

$$w'(s)=\partial_x u(x-2s,t+s)\cdot(-2)+\partial_t u(x-2s,t+s)$$
$$=(\nabla u)(x-2s,t+s)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Nun gilt

$$u(x,t)-u(x+2t,0)=w(0)-w(-t)$$
$$=\int_{-t}^{0}w'(s)\,ds=\int_{-t}^{0}(\nabla u)(x-2s,t+s)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}ds$$
$$\overset{\text{DGL}}{=}\int_{-t}^{0}e^{(x-2s)+(t+s)}\,ds=e^{x+t}\int_{-t}^{0}e^{-s}\,ds$$
$$=-e^{x+t}\left[e^{-s}\right]_{-t}^{0}=-e^{x+t}(1-e^{t})$$
$$=(e^{t}-1)e^{x+t}$$

Wegen $u(x+2t,0)=\cos(x+2t)$ (siehe DGL) folgt

$$u(x,t)=\cos(x+2t)+(e^{t}-1)e^{x+t}$$

für alle $x,t\in\mathbb{R}$

b) Der Separationsansatz liefert $u(x,t) = v(x)w(t)$ liefert $w'(t)v(x) = u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) = v''(x)w(t)$.

$$\Rightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1).$$

$$(1) \Rightarrow v''(x) = \lambda v(x). \quad (2)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$u(0,t) = v(0)w(t) = 0$, $u(1,t) = v(1)w(t) = 0 \Rightarrow$

$v(0) = v(1) = 0 \quad (3)$.

Fall 1: $\lambda > 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \\ v(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_2 = -c_1 \\ c_1 \underbrace{(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}})}_{\neq 0 \text{ da } \lambda > 0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$c_1 = c_2 = 0 \rightsquigarrow$ das liefert nur die triviale Lösung.

Fall 2: $\lambda = 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = c_1 x + c_2$.

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ v(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \rightarrow$$ das liefert nur die triviale Lösung.

Fall 3: $\lambda < 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$.

$v(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

$v(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$ (da $c_1 = 0$).

Da c_1 bekommen wir nicht triviale Lösung nur wenn $c_2 \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \overset{\lambda<0}{\Longrightarrow} \sqrt{-\lambda} = n\pi,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = -n^2\pi^2$.

das liefert die Lösung $v_n(x) = C_2 \sin(n\pi x)$.

und $(1) \Rightarrow \quad w_n''(t) = \lambda_n w_n(t) = -n^2\pi^2 \cdot w_n(t)$

$\Rightarrow \quad w_n(t) = D_1 \cos(n\pi t) + D_2 \sin(n\pi t)$.

Deshalb die Lösungen der Form $u(x,t) = w(t)v(x)$

sind $u_n(x,t) = w_n(t)v_n(x) = \left(\tilde{D}_1 \cos(n\pi t) + \tilde{D}_2 \sin(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)$

$\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 \in \mathbb{R}$ $\quad (\tilde{D}_1 = C_2 D_1,\ \tilde{D}_2 = C_2 D_2)$.

mit $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 4

a) Es gilt $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also induktiv $B^{2k} = I$ und $B^{2k+1} = B$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Somit folgt

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!} + \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot B$$
$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}}{2} I + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}}{2} B$$
$$= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot I + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

b) Wir definieren $z(t) = (x(t), x'(t), y(t), y'(t))^T$. Es folgt

$$z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) - x'(t) - 2x(t) \\ y'(t) \\ x'(t) + 2y(t) + 3y'(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} z(t)$$

c) Eine Lösung ist $y_1(x) = e^x$. Ansatz: $y(x) = v(x) y_1(x)$.
Einsetzen liefert

$$0 \overset{!}{=} x\left(v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''\right) - 2(x+1)\left(v' y_1 + v y_1'\right) + (x+2) v y_1$$
$$= v\underbrace{\left(x y_1'' - 2(x+1) y_1' + (x+2) y_1\right)}_{=0} + x y_1 v'' + \left(2y_1' - 2(x+1) y_1\right) v'$$
$$\overset{y_1 = e^x}{=} x e^x v'' - 2 e^x v'$$
$$\overset{x>0}{\Longrightarrow} v'' - \frac{2}{x} v' = 0 \overset{\omega = v'}{\Longrightarrow} \omega' = \frac{2}{x} \omega$$
$$\Longrightarrow \omega(x) = C x^2 \Longrightarrow v(x) = \underbrace{\frac{C}{3}}_{=: C_1} x^3 + C_2$$
$$\Longrightarrow y(x) = C_1 x^3 e^x + C_2 e^x$$