

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen  
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive  
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a)  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y \\ ix + y \\ 3x - 4iy \end{pmatrix}$

b)  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y + 2 \\ ix + y \end{pmatrix}$

c)  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i)$

Geben Sie im Falle der Linearität die Darstellungsmatrix von  $f$  bezüglich der kanonischen Basen an.

Aufgabe 2

Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \varphi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1, \quad \varphi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ .

Aufgabe 3

Im Vektorraum  $C^2((-\pi, \pi))$  der auf  $(-\pi, \pi)$  zweimal stetig differenzierbaren Funktionen seien die Funktionen  $v_1, v_2, v_3, v_4: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$v_1(x) = \sin x, \quad v_2(x) = \cos x, \quad v_3(x) = x \sin x, \quad v_4(x) = x \cos x.$$

- Zeigen Sie, dass  $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$  eine Basis von  $W := \text{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  ist.
- Für  $f \in W$  definiere  $D(f) := f'$ . Begründen Sie, dass  $D$  von  $W$  nach  $W$  abbildet, und zeigen Sie, dass die Abbildung  $D: W \rightarrow W, f \mapsto f'$ , linear ist.
- Geben Sie die Darstellungsmatrix von  $D: W \rightarrow W$  und  $D^2: W \rightarrow W$  bezüglich der Basis  $B$  von  $W$  an. (Dabei ist  $D^2(f) := D(D(f))$  für  $f \in W$ .)
- Sei  $g: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x \sin x + 5 \cos x$ . Berechnen Sie  $D^2(g)$  mit Hilfe der Darstellungsmatrix aus Teil **c**) und führen Sie eine Probe Ihrer Rechnung durch.

#### Aufgabe 4

Berechnen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\vartheta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vartheta(\vec{x}) := \vec{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 5

- Seien  $U, V, W$  Vektorräume. Zeigen Sie: Sind  $f: U \rightarrow V$  linear und  $g: V \rightarrow W$  linear, dann ist die Abbildung  $g \circ f: U \rightarrow W$  linear.
- Seien  $V, W$  Vektorräume,  $\dim V = n$ ,  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $f: V \rightarrow W$  linear. Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann isomorph ist, wenn  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  eine Basis von  $W$  bildet.

#### Aufgabe 6

- Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A + B)C, \quad A^*C, \quad C^T B.$$

- Gegeben seien  $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sowie  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ .
  - Geben Sie  $\vec{x} \cdot (A\vec{y})$  im Fall  $n = 3$  explizit an.
  - Vereinfachen Sie  $\vec{x}^T (A - A^T) \vec{x}$  sowie  $\vec{x}^T (A + A^T) \vec{x}$ .