Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

## Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

### Aufgabe 1

**a)** Die Menge $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf $G$ stetig.) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung aus Satz 4 in 38.3 erfüllt ist. Dies ist für $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}$ äquivalent zu $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} D_2v_3(x, y, z) - D_3v_2(x, y, z) \\ D_3v_1(x, y, z) - D_1v_3(x, y, z) \\ D_1v_2(x, y, z) - D_2v_1(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b \\ -3 - c \\ 1 - a \end{pmatrix} .$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt.

In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ x + 2y + z \\ -3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $g\colon G \to \mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x, y, z) = x + y - 3z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion $c\colon (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Es folgt $\partial_y g(x, y, z) = x + \partial_y c(y, z)$, und dies soll $= x + 2y + z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x, y) = 2y + z$, also $c(y, z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Somit:

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z) .$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x, y, z) = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit ein Potential

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2 .$$

**b)** Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}$ ein $C^1$-Vektorfeld ist, stellt $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar, wenn die Integrabilitätsbedingung aus Satz 4 in 38.3 erfüllt ist.

Ist $\vec{v}(x, y) =: \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt für jedes $x, y \in \mathbb{R}$

$$D_2v_1(x, y) = 2xg(xy) + (1 + 2xy)g'(xy)x,$$
$$D_1v_2(x, y) = 4xg(xy) + 2x^2g'(xy)y.$$

Daher ergibt sich für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$D_2v_1(x, y) = D_1v_2(x, y) \iff 2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \iff xg'(xy) = 2xg(xy).$$

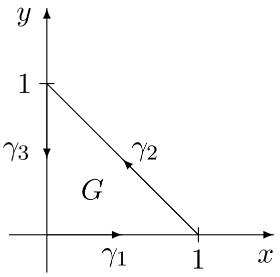
Dies ist genau dann erfüllt, falls $g'(t) = 2g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also genau für $g(t) = Ce^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Die Forderung $g(0) = 2$ führt auf $C = 2$.

Fazit: Ist $g(t) := 2e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt, so gilt $g(0) = 2$ und $\vec{v}$ stellt ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar.

Nun berechnen wir ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wegen $D_2f(x, y) = 4x^2e^{2xy} + 1$ gilt $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y + h(x)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $D_1f(x, y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + h'(x)$ und $D_1f(x, y) = v_1(x, y)$ folgt $h'(x) = 0$; dies ist beispielsweise für $h \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 2**

Zunächst berechnen wir $\displaystyle\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:




Definiere die regulären Kurven $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{r}_1(t) = (t,0)\,, \qquad \vec{r}_2(t) = (1-t,t)\,, \qquad \vec{r}_3(t) = (0,1-t)\,.$$

Dann ist $\vec{r}_k$ eine Parametrisierung von $\gamma_k$ (für $k = 1,2,3$) und es gilt $\vec{r}_1(1) = (1,0) = \vec{r}_2(0)$, $\vec{r}_2(1) = (0,1) = \vec{r}_3(0)$ sowie $\vec{r}_3(1) = (0,0) = \vec{r}_1(0)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2\cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 + (1-t)t \\ (1-t)^2 t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t - 3t^2 + t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t - 1\,dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - t^3 + t^2 - t\Big]_0^1 = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 + 0\cdot(1-t) \\ 0\cdot(1-t) - (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(1-t)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\oint_{\vec\gamma} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist $G$ ein beschränktes Gebiet, das gleichzeitig vom Typ $G^{(x)}$ und Typ $G^{(y)}$ ist. Es seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2 y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und $\gamma$ stückweise glatt, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene erfüllt sind. Dieser liefert

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \iint\limits_G (2xy - x)\,d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\,dy\,dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\,dx \\ &= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3**

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2 y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint\limits_G (x^2+y)\, d(x,y) = \iint\limits_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand $\partial G$ der offenen Einheitskreisscheibe $G$ ist gegeben durch die reguläre Kurve $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}\iint\limits_G (x^2+y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\, \sin^2 t + \sin t \cos^2 t\big)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \tfrac14 \sin^2(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t\, dt \\ &= \tfrac14 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \big[\tfrac13 \cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac18 \int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \overset{(***)}{=} \tfrac18 \cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

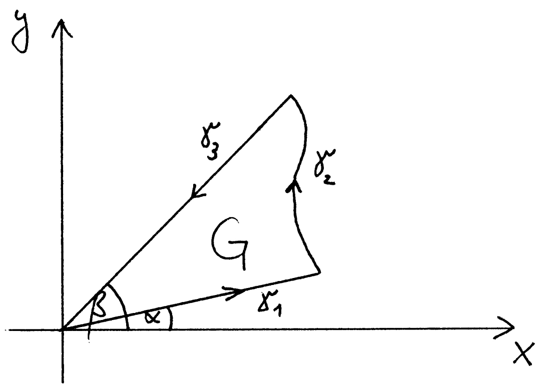
Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen oder auch folgendermaßen einsehen: Zuerst bemerken wir $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du$. In der Tat ist aufgrund der $2\pi$-Periodizität von cos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &\overset{\text{Subst. } t = u - \frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac32\pi} \sin^2(t + \tfrac{\pi}{2})\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac32\pi} \cos^2(t)\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t)\, dt + \int_0^{\frac32\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t + 2\pi)\, dt + \int_0^{\frac32\pi} \cos^2(t)\, dt \\ &\overset{\text{Subst. } v = t + 2\pi}{=} \int_{\frac32\pi}^{2\pi} \cos^2(v)\, dv + \int_0^{\frac32\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &= \frac12\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du\right) = \frac12\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du\right) \\ &= \frac12 \int_0^{2\pi} \big(\sin^2(u) + \cos^2(u)\big)\, du = \frac12 \int_0^{2\pi} 1\, du = \pi.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4**



Der positiv orientierte Rand von $G$ ist gegeben durch $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, wobei die Kurvenstücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ folgendermaßen parametrisiert seien

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : \quad \vec{r}_1(\tau) &= \begin{pmatrix} \tau \cos\alpha \\ \tau \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant r(\alpha), \\
\gamma_2 : \quad \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\
\gamma_3 : \quad \vec{r}_3(\tau) &= \begin{pmatrix} (r(\beta)-\tau)\cos\beta \\ (r(\beta)-\tau)\sin\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant r(\beta).
\end{aligned}$$

Ist $\vec{v}(x,y) := (-y, x)$ gesetzt, so erhält man nach 37.1 der Vorlesung für den Flächeninhalt von $G$

$$I(G) = \frac{1}{2}\oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s}\right).$$

Es gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{r(\alpha)} \vec{v}(\vec{r}_1(\tau))\cdot \vec{r}_1{}'(\tau)\,d\tau = \int_0^{r(\alpha)} \begin{pmatrix} -\tau\sin\alpha \\ \tau\cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} d\tau = \int_0^{r(\alpha)} 0\,d\tau = 0\,,$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{r(\beta)} \vec{v}(\vec{r}_3(\tau))\cdot \vec{r}_3{}'(\tau)\,d\tau = \int_0^{r(\beta)} \begin{pmatrix} -(r(\beta)-\tau)\sin\beta \\ (r(\beta)-\tau)\cos\beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\cos\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix} d\tau = \int_0^{r(\beta)} 0\,d\tau = 0\,.$$

Wegen

$$\vec{v}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2{}'(t) = \begin{pmatrix} -r(t)\sin t \\ r(t)\cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r'(t)\cos t - r(t)\sin t \\ r'(t)\sin t + r(t)\cos t \end{pmatrix} = r^2(t)\,(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2(t)$$

für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ergibt sich

$$\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_\alpha^\beta r^2(t)\,dt$$

und somit die behauptete Formel für den Flächeninhalt von $G$

$$I(G) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(t)\,dt\,.$$

**Aufgabe 5**

**a)** Wir setzen in die Ungleichung, die $G$ definiert, Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r \geqslant 0$ und $0 \leqslant \varphi < 2\pi$:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 < 3r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\,.$$

Wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3+\sin^2\varphi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3 + \sin^2\varphi$. Der Rand von $G$ besteht folglich aus dem Punkt $(0,0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,, \qquad \text{wobei} \quad r(t) := \sqrt{3+\sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

**b)** Die Leibnizsche Sektorformel liefert für den Flächeninhalt von $G$

$$I(G) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3+\sin^2 t)\,dt \overset{(***)\text{ in } \mathbf{3}}{=} \tfrac{1}{2}(6\pi + \pi) = \tfrac{7}{2}\pi\,.$$

**Aufgabe 6**

Wir bestimmen zunächst, welcher Teil $\mathcal{F}_Z$ von $\mathcal{F}$ innerhalb von $Z$ liegt:

$$\vec{r}(u,v) \in Z \iff (u+v)^2 + (u-v)^2 \leqslant 4 \iff 2u^2 + 2v^2 \leqslant 4\,.$$

Die Fläche $\mathcal{F}_Z$ ist also durch $\vec{r}(u,v)$ mit $(u,v) \in U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 2\}$ gegeben. Definitionsgemäß ist dann

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint\limits_{\mathcal{F}_Z} do = \iint\limits_{U} \|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|\; d(u,v)\,.$$

Hier haben wir

$$D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+2v \\ 2v-2u \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint\limits_{U} \sqrt{(2u+2v)^2 + (2v-2u)^2 + 4}\; d(u,v) = \iint\limits_{U} \sqrt{8(u^2+v^2)+4}\; d(u,v)\,.$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $d(u,v) = r\,d(r,\varphi)$ mit $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ und erhalten

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F}_Z) &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)+1} \cdot r\,d\varphi\,dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2+1}\,dr \\ &= \tfrac{2}{3}\pi\big[(2r^2+1)^{3/2}\big]_{r=0}^{\sqrt{2}} = \tfrac{2}{3}\pi\big(5^{3/2}-1\big) = \tfrac{2}{3}\pi\big(5\sqrt{5}-1\big)\,. \end{aligned}$$