

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Den Graphen von f bzw. g entnehmen wir

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [0, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Faltung von f und g ist nach Definition gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Offenbar ist $(f * g)(t) = 0$ für $t < 0$. Zur Berechnung von $(f * g)(t)$ für $t \geq 0$ unterscheiden wir folgende Fälle:

1. *Fall:* Für $t \in [0, 2)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(r) dr = \int_0^t 2 dr = 2t.$$

2. *Fall:* Für $t \in [2, 4)$ ergibt sich abermals mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

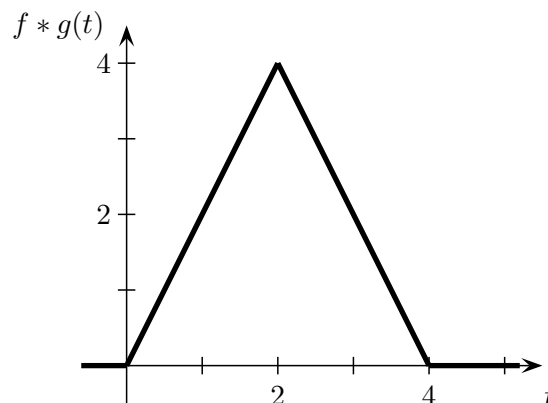
$$(f * g)(t) = \int_0^2 1 \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{t-2}^t g(r) dr = \int_{t-2}^2 2 dr = 8 - 2t.$$

3. *Fall:* Für $t \geq 4$ ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^2 1 \cdot \underbrace{g(t - \tau)}_{=0, \text{ da } t-\tau \geq 2} d\tau = 0.$$

Insgesamt haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0, 2) \\ 8 - 2t & \text{für } t \in [2, 4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 4 - 2|t - 2| & \text{für } t \in [0, 4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



b) Hier sind

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [3, 4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wiederum gilt $(f * g)(t) = 0$ für $t < 0$. Um die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

für $t \geq 0$ zu berechnen, führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: Für $t \in [0, 3)$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \underbrace{g(t - \tau)}_{=0, \text{ da } t - \tau < 3} d\tau = 0.$$

2. Fall: Für $t \in [3, 4)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^t g(r) dr = \int_3^t 1 dr = t - 3.$$

3. Fall: Für $t \in [4, 5)$ ergibt sich erneut mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

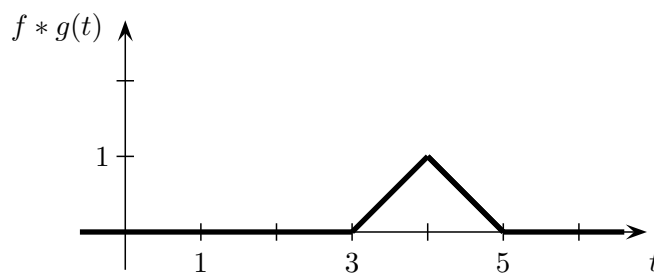
$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^t g(r) dr = \int_{t-1}^4 1 dr = 5 - t.$$

4. Fall: Für $t \geq 5$ ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot \underbrace{g(t - \tau)}_{=0, \text{ da } t - \tau \geq 4} d\tau = 0.$$

Zusammenfassend haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} t - 3 & \text{für } t \in [3, 4) \\ 5 - t & \text{für } t \in [4, 5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 - |t - 4| & \text{für } t \in [3, 5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Aufgabe 2

Um eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ mit

$$f(t) = t^3 + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau \quad \text{für alle } t \geq 0$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$f(t) = t^3 + (f * (h \sin))(t)$$

und wenden die Faltungsregel 12.1 an. Für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$ gilt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(t^3 h(t))(s) + \mathcal{L}(f * (h \sin))(s) = \mathcal{L}(t^3 h(t))(s) + \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(h \sin)(s).$$

Hieraus folgt wegen $t^3 h(t) \circ \bullet \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\sin(t)h(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2+1}$ (für $\operatorname{Re}(s) > 0$)

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{6}{s^4} + \mathcal{L}(f)(s) \frac{1}{s^2+1} \iff \mathcal{L}(f)(s) \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6}{s^4}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}.$$

Schließlich erhalten wir mit $t^5 h(t) \circ \bullet \frac{5!}{s^6}$ (für $\operatorname{Re}(s) > 0$)

$$\mathcal{L}(f)(s) \bullet \circ t^3 h(t) + \frac{6}{5!} t^5 h(t) = (t^3 + t^5/20) h(t),$$

also $f(t) = (t^3 + \frac{1}{20}t^5) h(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Somit löst $y(t) := t^3 + \frac{1}{20}t^5$, $t \geq 0$, die gegebene Gleichung.

Aufgabe 3

- a) i) Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$. Diese sind $0, -1, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Um die Koeffizienten A, B, C zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.

1. *Möglichkeit:* Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{aligned} x = 0 : & \quad -1 = -2A & \iff & \quad A = 1/2 \\ x = -1 : & \quad -1 = 3B & \iff & \quad B = -1/3 \\ x = 2 : & \quad 5 = 6C & \iff & \quad C = 5/6 \end{aligned}$$

2. *Möglichkeit:* Um A , den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \rightarrow \lambda$, also $x \rightarrow 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3}, \\ C &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x-2) \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}.$$

- ii) Wiederum müssen zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt werden. Durch "scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass -1 eine solche ist. Polynomdivision liefert $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)$, und wegen $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ ergibt sich

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Damit ist 1 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Nach Multiplikation mit $(x - 1)(x + 1)^2$ ist

$$x = A(x + 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x - 1) = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x - 1).$$

Setzen wir die Nullstellen -1 und 1 herein ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} x = -1 : \quad -1 &= -2C & \iff & C = 1/2 \\ x = 1 : \quad 1 &= 4A & \iff & A = 1/4 \end{aligned}$$

Um B zu bestimmen, können wir einen beliebigen anderen Wert für x einsetzen. Wir wählen $x = 0$, weil dann die linke Seite der Gleichung verschwindet:

$$0 = A - B - C = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2} \iff B = -\frac{1}{4}.$$

Alternativ könnten wir zur Bestimmung von A, B, C auch einen Koeffizientenvergleich durchführen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt

$$\begin{aligned} x^2 : \quad 0 &= A + B \\ x : \quad 1 &= 2A + C \\ 1 : \quad 0 &= A - B - C \end{aligned}$$

beziehungsweise geschrieben mit Hilfe der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right).$$

Jedenfalls liefern beide Alternativen $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Folglich ist

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{1}{2(x + 1)^2}.$$

- iii) Offenbar ist 2 eine Nullstelle des Nennerpolynoms $8 - x^3$. Mit Hilfe der Polynomdivision $(-x^3 + 8) : (x - 2)$ sehen wir

$$8 - x^3 = -(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Das Polynom $x^2 + 2x + 4$ hat die beiden nichtreellen Nullstellen $-1 + \sqrt{3}i$ und $-1 - \sqrt{3}i$. Damit lautet der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{8 - x^3} = \frac{-x}{(x - 2)(x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i))} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - (-1 + \sqrt{3}i)} + \frac{C}{x - (-1 - \sqrt{3}i)}.$$

Nun müssen wir die Koeffizienten A, B, C bestimmen. Hierzu multiplizieren wir obige Gleichung mit dem Hauptnenner $(x - 2)(x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i))$ durch

$$-x = A(x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i)) + B(x - 2)(x - (-1 - \sqrt{3}i)) + C(x - 2)(x - (-1 + \sqrt{3}i)).$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms ergibt

$$\begin{aligned} x = 2 : & \quad -2 = A(3 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i) = 12A, \\ x = -1 + \sqrt{3}i : & \quad 1 - \sqrt{3}i = B(-3 + \sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i) = -6B(1 + \sqrt{3}i), \\ x = -1 - \sqrt{3}i : & \quad 1 + \sqrt{3}i = C(-3 - \sqrt{3}i)(-2\sqrt{3}i) = -6C(1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A &= -1/6, \\ B &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 + 3} = \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i, \\ C &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{1 + 3} = \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i. \end{aligned}$$

Als Endergebnis für die komplexe Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{x}{8 - x^3} = -\frac{1}{6} \frac{1}{x - 2} + \frac{\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i}{x - (-1 + \sqrt{3}i)} + \frac{\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i}{x - (-1 - \sqrt{3}i)}.$$

- b) i) Wegen $(x + 1)^2(x^3 + 1) = (x + 1)^3(x^2 - x + 1) = (x + 1)^3(x - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2})(x - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ bzw. $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x + 1)^2(x^3 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{x - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} + \frac{E}{x - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}}.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$.

- ii) Es gilt: $x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$. Also ist 0 eine doppelte Nullstelle, während die Nullstellen $1, -1, i, -i$ jeweils einfach sind. Der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^6 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1} + \frac{E}{x - i} + \frac{F}{x + i}.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{4}i$, $F = \frac{1}{4}i$.

Aufgabe 4

- a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1} \right).$$

Wegen $\frac{1}{s - 1} = \mathcal{L}(h)(s - 1) = \mathcal{L}(e^{1 \cdot t}h(t))(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und $\frac{1}{s + 1} = \mathcal{L}(h)(s + 1) = \mathcal{L}(e^{(-1) \cdot t}h(t))(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > -1$ erhalten wir für $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2 - 1} \bullet \circ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})h(t) = \sinh(t)h(t).$$

Alternativ: Nach der Faltungsregel gilt für $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{s - 1} \frac{1}{s + 1} = \mathcal{L}(g_1)(s) \mathcal{L}(g_2)(s) = \mathcal{L}(g_1 * g_2)(s)$$

wobei $g_1(t) := e^t h(t)$ und $g_2(t) := e^{-t} h(t)$ gesetzt seien. Also fanden wir mit der Faltung $g_1 * g_2$ eine Funktion mit $\mathcal{L}(g_1 * g_2)(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$. Nun müssen wir nur noch $g_1 * g_2$ berechnen. Für $t < 0$ ist $(g_1 * g_2)(t) = 0$ und für $t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2)(t) &= \int_0^t g_1(t - u)g_2(u) du = \int_0^t e^{t-u} e^{-u} du = e^t \int_0^t e^{-2u} du \\ &= e^t \left(-\frac{1}{2} e^{-2u} \right) \Big|_{u=0}^t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t). \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(h)(s) - \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{-2t}h(t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})h(t)\right)(s).$$

Alternativ: Wir können den b)-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des a)-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + 2s} &= \frac{1}{(s+1)^2 - 1} \stackrel{\text{a)}}{=} \mathcal{L}(\sinh(t)h(t))(s+1) = \mathcal{L}(e^{-1 \cdot t} \sinh(t)h(t))(s) \\ &= \mathcal{L}\left(e^{-1 \cdot t} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})h(t)\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})h(t)\right)(s). \end{aligned}$$

c) Der Ansatz

$$\frac{s+3}{s^3 + 4s^2} = \frac{s+3}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}$$

führt auf

$$A = \frac{1}{16}, \quad B = \frac{3}{4}, \quad C = -\frac{1}{16}.$$

Damit gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\frac{s+3}{s^3 + 4s^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{s+4} \bullet \circ \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t}\right)h(t).$$

d) Es sei $a > 0$ fest gewählt. Der Ansatz einer (komplexen) Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{s+a}{s(s-ia)(s+ia)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-ia} + \frac{C}{s+ia}$$

bzw.

$$s+a = A(s-ia)(s+ia) + Bs(s+ia) + Cs(s-ia).$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms liefert

$$\begin{aligned} s=0: & \quad a = Aa^2 & \iff & \quad A = \frac{1}{a}, \\ s=ia: & \quad ia+a = -2Ba^2 & \iff & \quad B = -\frac{1+i}{2a}, \\ s=-ia: & \quad -ia+a = -2Ca^2 & \iff & \quad C = -\frac{1-i}{2a}. \end{aligned}$$

Demzufolge ist für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a} \frac{1}{s} - \frac{1+i}{2a} \frac{1}{s-ia} - \frac{1-i}{2a} \frac{1}{s+ia} \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}(h)(s) - \frac{1+i}{2a} \mathcal{L}(e^{iat}h(t))(s) - \frac{1-i}{2a} \mathcal{L}(e^{-iat}h(t))(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}h(t) - \frac{1+i}{2a}e^{iat}h(t) - \frac{1-i}{2a}e^{-iat}h(t)\right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}h(t)\left(1 - \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})\right) + \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}h(t)(1 - \cos(at) + \sin(at))\right)(s). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir verwenden Satz 1 aus 9.1: Sei $f \in \mathfrak{F}$ eine Funktion mit dem Wachstumskoeffizienten σ_0 . Gilt $f(t) \circ \bullet F(s)$, dann ist F in $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ holomorph mit $F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt$, d.h.

$$-tf(t) \circ \bullet F'(s).$$

Deshalb ist $f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}(F')(t)$ für $t > 0$.

- a) Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ sei $F(s) := \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) = \ln\left(\frac{s-a+2a}{s-a}\right) = \ln\left(1 + \frac{2a}{s-a}\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{1}{1 + \frac{2a}{s-a}} \frac{-2a}{(s-a)^2} = \frac{-2a}{(s-a)^2 + 2a(s-a)} = \frac{-2a}{(s-a)(s+a)} \\ &= -\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet \circ (-e^{at} + e^{-at}) h(t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $t \neq 0$

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}(F')(t) = \frac{1}{t} (e^{at} - e^{-at}) h(t) = \frac{2 \sinh(at)}{t} h(t).$$

- b) Für $F(s) := \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$, $s \in (0, \infty)$, ergibt sich

$$F'(s) = \frac{1}{1 + (a/s)^2} \frac{-a}{s^2} = \frac{-a}{s^2 + a^2} \bullet \circ -\sin(at) h(t).$$

Hieraus folgt $f(t) = \frac{\sin(at)}{t} h(t)$, $t \neq 0$.

- c) Ist $F(s) := \ln\left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right) = \ln\left(\left(1 - \frac{a}{s}\right)\left(1 + \frac{a}{s}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{s}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right)$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{a}{s^2 - as} - \frac{a}{s^2 + as} = \frac{a}{s(s-a)} - \frac{a}{s(s+a)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \\ &= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet \circ (-2 + e^{at} + e^{-at}) h(t) = (-2 + 2 \cosh(at)) h(t). \end{aligned}$$

Für $f(t) := 2 \frac{1 - \cosh(at)}{t} h(t)$, $t \neq 0$, gilt somit $f(t) \circ \bullet \ln\left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right)$.

Aufgabe 6

- a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+) \\ &\stackrel{(*)}{=} s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

für eine n -mal stetig differenzierbare Funktion f [Insbesondere sind dann $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ rechtsseitig stetig in 0, woraus die Gleichheit in (*) folgt.], die höchstens von exponentiellem Wachstum ist, und $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$. Speziell für $n = 1, 2$ haben wir

$$\mathcal{L}(f')(s) = s \mathcal{L}(f)(s) - f(0) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0). \quad (**)$$

Da die Anfangswerte $y(3)$ und $y'(3)$ vorgegeben sind, können wir obiges Resultat nicht direkt anwenden. Deshalb bestimmen wir zunächst eine Funktion u mit $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$, $u(0) = 7$, $u'(0) = 1$. Dann gewinnen wir eine Lösung y des ursprünglichen Anfangswertproblems durch Verschieben von u , indem wir $y(t) := u(t - 3)$ setzen.

Für eine Lösung u des Problems $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$ mit den Anfangswerten $u(0) = 7$ und $u'(0) = 1$ bedeutet (**)

$$\mathcal{L}(u')(s) = s \mathcal{L}(u)(s) - 7 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(u'')(s) = s^2 \mathcal{L}(u)(s) - 7s - 1.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{12}{s} &= \mathcal{L}(12h)(s) = \mathcal{L}(u'' + 4u' + 3u)(s) = (s^2 \mathcal{L}(u)(s) - 7s - 1) + 4(s \mathcal{L}(u)(s) - 7) + 3 \mathcal{L}(u)(s) \\ &= (s^2 + 4s + 3) \mathcal{L}(u)(s) - 7s - 29,\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \left(7s + 29 + \frac{12}{s} \right) = \frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)}.$$

Um eine Funktion anzugeben, deren Laplacetransformierte gleich $\frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)}$ ist, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s+1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\mathcal{L}(u)(s) \bullet \circ (4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t})h(t),$$

und wir haben eine Lösung u gefunden: Es ist

$$u(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

Somit löst $y(t) := u(t-3) = 4 + 5e^{-t+3} - 2e^{-3t+9}$, $t \geq 3$, das ursprüngliche Problem.

- b) Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erhält man hier $\mathcal{L}(y')(s) = s \mathcal{L}(y)(s)$ und $\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 \mathcal{L}(y)(s)$ für hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$, und mit $y''(0) = 1$ ergibt sich

$$\mathcal{L}(y''')(s) = s^3 \mathcal{L}(y)(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) = s^3 \mathcal{L}(y)(s) - 1.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1} &= \mathcal{L}(h)(s-1) = \mathcal{L}(e^t h(t))(s) = \mathcal{L}(y''' - 3y'' + 3y' - y)(s) \\ &= (s^3 \mathcal{L}(y)(s) - 1) - 3s^2 \mathcal{L}(y)(s) + 3s \mathcal{L}(y)(s) - \mathcal{L}(y)(s) \\ &= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1) \mathcal{L}(y)(s) - 1 = (s-1)^3 \mathcal{L}(y)(s) - 1,\end{aligned}$$

und dies führt auf

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)^3} \left(1 + \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt bekanntlich

$$\mathcal{L}(t^n h(t))(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0),$$

und mit der Dämpfungsregel folgt

$$\frac{1}{(s-1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \mathcal{L}(t^n h(t))(s-1) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}(e^t t^n h(t))(s) \quad (\operatorname{Re}(s) > 1).$$

Hiermit bekommen wir

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^t t^2 h(t))(s) + \frac{1}{6} \mathcal{L}(e^t t^3 h(t))(s) = \mathcal{L}(e^t h(t)(t^2/2 + t^3/6))(s),$$

d.h. eine Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = e^t(t^2/2 + t^3/6), \quad t \geq 0.$$

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s \mathcal{L}(y)(s) - 6 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(y'')(s) = s^2 \mathcal{L}(y)(s) - 6s - c.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{6}{(s+1)^2} &= \mathcal{L}(6te^{-t}h(t))(s) = \mathcal{L}(y'' + 2y' + y)(s) \\ &= (s^2 \mathcal{L}(y)(s) - 6s - c) + 2(s \mathcal{L}(y)(s) - 6) + \mathcal{L}(y)(s) \\ &= (s^2 + 2s + 1) \mathcal{L}(y)(s) - 6s - c - 12. \end{aligned}$$

Für eine Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2} \right) = \frac{6(s+1) + c + 6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} \\ &= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \mathcal{L}(t^n h(t))(s+1) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}(e^{-t} t^n h(t))(s) \quad (\operatorname{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

schließt man

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} \bullet \circ (6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t})h(t),$$

d.h. $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$, $t \geq 0$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13+c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Eine Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 7

Wendet man auf die rechte und linke Seite der Gleichung $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$ die Laplacetransformation an und berücksichtigt die Werte $y(0) = 1, y'(0) = 1$, so bekommt man für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) &= 3e^{-s} + e^{2s} \\ \iff (s^2 - 4s + 4)Y(s) &= s - 3 + 3e^{-s} + e^{-2s} \\ \iff Y(s) &= \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}. \end{aligned}$$

Dabei sei $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ gesetzt. Nun ist

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} \bullet \circ (e^{2t} - te^{2t})h(t) = (1-t)e^{2t}h(t).$$

Für $f(t) := te^{2t}h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gilt nach der Dämpfungsregel $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(th(t))(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 2$. Mit der Verschiebungsregel ergibt sich

$$\frac{e^{-s}}{(s-2)^2} = e^{-s} \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(f(t-1))(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} = e^{-2s} \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(f(t-2))(s).$$

Daher ist

$$\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} \bullet \circ 3f(t-1) + f(t-2) = 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2).$$

Zusammen folgt

$$Y(s) \bullet \circ (1-t)e^{2t}h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2).$$

Nach einer Probe sieht man, dass $y(t) := (1-t)e^{2t}h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)$, $t \in \mathbb{R}$, das gegebene Problem im Sinne von 14.3 der Vorlesung löst.