2. Teil HM II Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Kapitel Differenzieren im Komplexen. Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen (CR-Dglen)

1.1 Wir werden häufig den $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren, d.h. ausnutzen, dass die Zuordnung
$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad z \to \begin{pmatrix} Re(z) \\ Im(z) \end{pmatrix}$$
eine bijektive (lineare) Abbildung ist.

Wir schreiben z.B. wahlweise G ist Gebiet im $\mathbb{R}^2$ oder in $\mathbb{C}$.

Beispiel: Mittels dieser Zuordnung wird dem Produkt der komplexen Zahlen $\xi = a+ib$, $z = x+iy$ $(a,b,x,y \in \mathbb{R})$ das Element $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet.

1.2 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ eine Funktion. Setze
$u(x,y) := Re(f(x+iy))$, $v(x,y) := Im(f(x+iy))$ $((x,y) \in G)$.
Wir ordnen f das Vektorfeld $\vec{f}: G \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, $(x,y) \in G$, zu.

Beispiele:

1) $f(z) = e^z \longrightarrow \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

2) $f(z) = z^2 \longrightarrow \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

3) $f(z) = \sin(z) \longrightarrow \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \cosh(y) \\ \cos x \sinh(y) \end{pmatrix}$

1.3 Die komplexe Funktion $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ diff'bar, falls $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.

In diesem Fall wird der Grenzwert durch $f'(z_0)$ bezeichnet und die erste Ableitung von f in z_0 genannt.

Bemerkungen: 1) Ist f in z_0 diff'bar, so ist f in z_0 stetig.

2) Die aus dem Reellen bekannten Regeln wie z.B.: Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Differenzieren von Potenzreihen: gelten wörtlich hier in diesem allgemeineren Rahmen.

3) Definition: f heißt in $z_0 \in G$ holomorph, falls f in einer Umgebung von z_0 diff'bar ist.
f heißt holomorph in G, falls f in jedem Punkt $z \in G$ holomorph ist.

Setzt man die (reelle) Diff'barkeit von $f(x+iy)$ als Funktion von x und y in Beziehung zur Diff'barkeit von $f(z)$, so erhält man:

Satz 1 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$) ein Gebiet und $u, v: G \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Definiert man $w = f(z)$, $z \in G$ durch $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ (also $f = u + iv$), so gilt:

$f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in G holomorph

$\iff$

u, v sind in G diff'bar, und es sind die Cauchy-Riemann Dgln $\quad D_1 u(x,y) = D_2 v(x,y),\ D_2 u(x,y) = -D_1 v(x,y)$ $\quad (x,y) \in G$ erfüllt.

Dann gilt: $f'(x+iy) = (D_1 u)(x,y) + i(D_1 v)(x,y)$

1.4 Folgerungen

1) $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei in G holomorph. Mit $\vec{f} = \binom{u}{v}$

(siehe oben 1.2) gilt:

$$\underline{\det \vec{f}'(x,y) = |f'(x+iy)|^2}, \quad (x,y) \in G.$$

2) Ist $f = u + iv$ im Gebiet G holomorph, so gilt
$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0.$

(die Kurvenscharen $u(x,y) = \text{konst}$ und $v(x,y) = \text{konst}$ sind zueinander orthogonale Scharen)

3) Holomorphe Funktionen und harmonische Funktionen

$u \in C^2(G)$ mit $\Delta u(x,y) = \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0, (x,y) \in G,$ heißt harmonisch in G.

Wir verwenden im Vorgriff auf noch zu Begründendes, dass gilt: Ist f in G holomorph, so ist auch f' in G holomorph.

Daraus folgt: $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$ sind aus $C^\infty(G)$

Satz 2 Ist $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ in G holomorph, so sind u und v in G harmonisch.

Satz 3 (~~vgl~~ Satz 4 / Kap 38 / HM4)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zshgdes Gebiet und u eine in G harmonische Funktion. Dann gibt es eine Funktion $v: G \to \mathbb{R}$ derart, dass $f = u + iv$ in G holomorph ist (eine solche Funktion v ist harmonisch (Satz 2): sie heißt auch zu u konjugiert harmonisch).

Beispiel: $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$. $\quad f(z) = z^2 + iz + i\alpha \; (\alpha \in \mathbb{R})$
mit $v(x,y) = 2xy + x + \alpha$

2. Kapitel Schlichte Funktionen. Der komplexe Logarithmus. Wurzeln.

2.1 $f: G \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, heißt <u>schlicht auf G</u>, falls f auf G holomorph und injektiv ist.

<u>Beispiele:</u>

1) $w = f(z) = z^2$ ist auf $G_1 = \{z \mid 0 < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}$ <u>nicht schlicht</u>, da für $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ gelten: $z_1, z_2 \in G_1$, $z_1 \neq z_2$ und $z_1^2 = z_2^2 (= i)$.

2) $w = f(z) = z^2$ ist auf $G_2 = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ <u>schlicht</u>.

3) $w = f(z) = e^z$ ist auf $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$P := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im}(z) < \alpha + \beta\}$$

genau dann schlicht, falls $0 < \beta \leq 2\pi$ erfüllt ist.

2.2 (Umformulierung des Satzes 1, Kapitel 3), für $\vec{f} = \binom{u}{v}$ auf $f = u + iv$)

<u>Satz 1</u>

$f: G \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, sei schlicht auf dem Gebiet G. Dann gelten: $f(G)$ ist ein Gebiet, die Umkehrfunktion $g (= f^{-1}): f(G) \to G$ ist schlicht, und es gilt

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad w \in f(G).$$

<u>Bemerkung</u>: Aus "f schlicht auf G" folgt: $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in G$.

Aber: Aus "$f'(z) \neq 0, \forall z \in G$" folgt i.a. nicht: f schlicht auf G.

<u>Beispiel?</u>

2.3 Der komplexe Logarithmus

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, fest und $k \in \mathbb{Z}$. Definiere:

$$P_{\alpha,k} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \alpha + 2k\pi < \arg(z) < \alpha + 2(k+1)\pi \}$$

$$\mathbb{C}_\alpha := \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi \}$$
$$= \mathbb{C} \setminus \{ z \mid z = re^{i\alpha},\ r \geq 0 \}$$

Satz 2 α, k seien (wie oben und) beliebig, fest. Es gelten:
$\exp : P_{\alpha,k} \to \mathbb{C}_\alpha$ ist schlicht und surjektiv.

Satz 3 Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$w = \log(z) := \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi),$$
$$z \neq 0,\ \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi,$$

die Funktion $\log : \mathbb{C}_\alpha \to P_{\alpha,k}$ mit $\exp(\log(z)) = z$, $z \in \mathbb{C}_\alpha$, definiert.

Da exp auf $P_{\alpha,k}$ schlicht ist und $\exp'(z) = z$ gilt, ist nach Satz 1 log schlicht, und es gilt $\log'(z) = \frac{1}{z}$.
Dies kann man für $w = \log(z)$, $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$, $k = 0$ (z.B.) explizit nachrechnen. (In der Vorlesung Satz 4)

Hierbei sind die CR-Dgln in Polarkoordinaten nützlich:
Ist $f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + i v(r,\varphi)$ holomorph, so gelten:

$$r D_1 u(r,\varphi) = D_2 v(r,\varphi)$$
$$D_2 u(r,\varphi) = -r D_1 v(r,\varphi).$$

Bemerkung: Wählt man in Satz 3 $\alpha = 0, k = 0$ oder $\alpha = -\pi, k = 0$, so nennt man diese Logarithmusfunktion den „Hauptzweig" des Logarithmus.

2.4 Potenzen, Wurzeln

Es sei $a \in \mathbb{C}$.

Definition $z^a := e^{a \log(z)}$, $z \in G$. G ist ein Gebiet, in dem log definiert ist

also etwa: $z \neq 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$ ($z \in \mathbb{C}_{-\pi}$)

oder $z \neq 0$, $0 < \arg(z) < 2\pi$ ($z \in \mathbb{C}_0$)

Es sei etwa $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi)}, \quad z \in \mathbb{C}_{-\pi}$$

die holomorphe Funktion $(z^a)_k$ definiert.

Für $(z^a)_0$, für den Hauptzweig von z^a, schreiben wir z^a.

Mit $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sind $(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, für $z \in \mathbb{C}_0$ (oder $\mathbb{C}_{-\pi}$) die n verschiedenen Lösungen der Gleichung $w^n = z$. (vergleiche mit HM I, 6.4)

Vorsicht mit aus dem Reellen bekannten Regeln zum Rechnen mit Logarithmen und Potenzen. Diese sind — ohne genaue Zusatzbetrachtungen — i.a. falsch.

Beispiele: 1) Ist $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $z \neq 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$

so gilt $\log(i(-1+i)) = \ln\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}$ $\neq$!

aber $\log i + \log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$

2) "$\log(z^a) = a \log z$"

Mit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $z \neq 0$, $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2}$ würde man erhalten:

$$i\pi = \log(-1) = \frac{1}{4}\log(-1)^4 = \frac{1}{4}\log(1) = i\frac{\pi}{2}. \quad !$$