8. Kapitel Die Laplace Transformation. Definition

8.1 Definition der für das folgende zulässigen Funktionen $\mathfrak{Z}$.

$f \in \mathfrak{Z} \iff$ 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0$ für $t < 0$

2. f, f' sind stetig bis auf Sprungunstetigkeiten. In jedem endlichen Intervall gibt es höchstens endlich viele Sprungstellen.

3. f ist für $t \to \infty$ höchstens von exponentiellem Wachstum: es gibt eine reelle Konstante σ derart, dass

(E) $\quad |f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \; t \geq 0$

erfüllt ist. M ist eine geeignete Konstante.

Bemerkungen: 1) Sind $f, g \in \mathfrak{Z}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist auch $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{Z}$. ($\mathfrak{Z}$ ist ein komplexer Vektorraum mit + (Addition von Fktn) und der üblichen skalaren Multiplikation bei Funktionen)

2) Gilt (E), so gilt (E) für alle $\sigma' > \sigma$. Die kleinste Zahl σ_0 mit: (E) gilt für jedes $\sigma > \sigma_0$ heißt der Wachstumskoeffizient von f.

3) Für $f(t) = \exp(\exp(t))$ oder $f(t) = \exp(t^2)$ ist (E) nicht erfüllbar.

8.2 Beispiele

1) $$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{(Heaviside Funktion)}$$

$h \in \mathfrak{Z}$, $\sigma_0 = 0$

2) $n \in \mathbb{N}$. $f(t) = h(t)\, t^n$, $f \in \mathcal{Z}$, $\sigma_0 = 0$

3) $f(t) = h(t)\, e^{at}$ $(a \in \mathbb{C},\ a = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$f \in \mathcal{Z}$, $\sigma_0 = \alpha$

8.3 Satz 1: Es sei $f \in \mathcal{Z}$ mit dem Wachstumskoeffizienten σ_0.
Es sei $s = \sigma + i\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(1.1) \qquad F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

absolut konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

8.4 Die hierdurch für s mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ definierte Funktion F heißt die Laplace Transformierte von f.
Hierfür schreiben wir auch

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

oder mittels des Doetsch Symbols in der folgenden Form

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s).$$

Die Zuordnung $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$ heißt Laplace Transformation. $\mathcal{L}$ ist linear;

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\, \mathcal{L}(f) + \beta\, \mathcal{L}(g),\quad f, g \in \mathcal{Z},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

8.5 Beispiele

1) $\mathcal{L}(h)(s) = H(s) = \dfrac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Das wird auch so geschrieben: $1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s}$ $(\mathrm{Re}(s) > 0)$

2) $f_n(t) := h(t)\, t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$h(t)\, t^n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

3) $f(t) = h(t)\, e^{at}$ $\quad (a \in \mathbb{C},\ Re(a) = \alpha)$

$$h(t)\, e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \qquad (Re(s) > \alpha)$$

$\Rightarrow$ 4) $(\omega \in \mathbb{R})$ $\quad h(t) \sin \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (Re(s) > 0)$

$$h(t) \cos \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (Re(s) > 0)$$

5) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wie folgt gegeben:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & , t < 0 \\ f = f(t) & , 0 \le t < T \\ f(t) = f(t+T) & , t \geq 0 \end{cases}$$ (T-periodische Fortsetzung von $[0,T)$ auf $[0,\infty)$)

Satz 2 $\quad F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$

Testen Sie sich und die Formel mit $f(t) = h(t) \sin \omega t$.

---

9. Kapitel Analytische Eigenschaften der Laplace Transformierten

9.1 Satz 1

Es sei F die Laplace Transformierte einer Funktion $f \in \mathfrak{J}$ mit dem Wachstumskoeffizienten σ_0. Dann ist F holomorph in der Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} \,/\, Re(s) > \sigma_0 \}$. Es gilt

$F'(s) = \displaystyle\int_0^\infty -t e^{-st} f(t)\, dt$, d.h.

$$-t f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s)$$

falls $\quad f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$.

9.2 Satz 2

Ist $f \in \mathfrak{Z}$, so gilt $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$, wobei $s \to \infty$ in dem Sinn zu verstehen ist, dass $Re(s) \to \infty$ gilt.

9.3 Satz 3

Aus $f_1, f_2 \in \mathfrak{Z}$ und $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$ folgt: $f_1(t) = f_2(t)$ für alle t, in denen f_1 und f_2 stetig sind.

Bemerkung

Zwei Funktionen aus $\mathfrak{Z}$, die sich höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden, werden als gleich definiert.

Satz 3 gibt dann eine eindeutige Zuordnung

$$F \; (= \mathcal{L}(f)) \to f$$
$$\mathcal{L}(\mathfrak{Z}) \to \mathfrak{Z}.$$

Diese Zuordnung heißt die inverse Laplace Transformation

Sie wird durch $\mathcal{L}^{-1}$ bezeichnet: $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$, falls $\mathcal{L}(f) = F$.

9.4 Beispiel. Aus f stetig für $t > 0$ und $f, f' \in \mathfrak{Z}$ und
$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$$
folgt
$$\boxed{\text{(+)}} \quad f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0+).$$

Hiermit kann das Problem
$$y'(t) - y(t) = 1, \; t \geq 0$$
$$y(0) = 0$$
Laplace transformiert werden. Es ergibt sich für $Y = \mathcal{L}(y)$ die folgende Gleichung: $sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

mit Satz 3 und $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$, $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ (8.5)

folgt $y(t) = e^{t} - 1$, $t \geq 0$.

---

10. Kapitel Regeln zum Rechnen mit $\mathcal{L}$

10.1 $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, c konst > 0, $f \in \mathfrak{Z}$

$\Rightarrow$: $f(ct) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{c} F(\frac{s}{c})$ (Ähnlichkeitstransformation)

10.2 Verschiebungssatz

$f \in \mathfrak{Z}$, $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Es gilt für jedes $T > 0$:

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-sT} F(s)$$

Beispiel: $A > 0$, konst.

$$f(t) = nA, \quad (n-1)T \leq t < nT, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$f(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s} \frac{1}{1 - e^{-sT}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

10.3 Dämpfungssatz

mit $f \in \mathfrak{Z}, \sigma_0$, $a \in \mathbb{C}$ und $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

folgt: $e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$ $\qquad (\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 + \mathrm{Re}(a))$

10.4 Differentiationssatz

Es sei f für $t \geq 0$ n-mal diff'bar,
$\mathcal{L}(f^{(n)})(s)$ existiere für $s = \sigma_0 > 0$.
Dann konvergiert $\mathcal{L}(f)(s)$ für $s = \sigma_0$, es existieren
$\lim_{t \to 0+} f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0+)$ $(k = 0, \dots, n-1)$,
und es gilt

$$\underline{f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0+)}$$

für $s = \sigma_0$ und s mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

Begründung mit 9.4 (*) ($n = 1$) und vollst. Induktion

Beispiele: 1) $\sin \omega t$ ist die Lösung y des Problems

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \ t \geq 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = \omega \end{cases} \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

Für $Y = \mathcal{L}(y)$ folgt: $s^2 Y(s) - \omega + \omega^2 Y(s) = 0$

oder: $Y(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ (8.5, 4)

2) $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$: Für $f(t) = t^n$ gelten

$f^{(n)}(t) = n!$ und $f^{(k)}(0+) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f^{(n)})(s) = \frac{n!}{s} = s^n \mathcal{L}(t^n)$$

$$\Rightarrow t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (8.5, 2)$$

Korrektur HMII (2. Teil (11. Woche) S. -5- / Z. 3

$P_{\alpha,k} := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \alpha + 2k\pi < \underline{\mathrm{Im}(z)} < \alpha + 2(k+1)\pi \}$

13. Zeile: $\exp'(z) = \exp(z)$ (nicht $= z$)