10.5 $\underline{(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F^{(n)}(s)}$

<u>Beispiel</u>: Mit $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$ folgt

$$t^n e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

10.6 Integralsatz (für das Urbild)

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$$

---

11. Kapitel Das Anfangswertproblem für die lineare Gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

11.1 a, b, c, y_0, y_0' sind gegebene Konstanten, $f = f(t) \in \mathcal{J}$ ist gegeben

gesucht ist $y = y(t)$

$$(P) \quad \begin{cases} a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \ t \geq 0 \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_0'. \end{cases}$$

Es sei $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$, $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.
Wende $\mathcal{L}$ auf (P) an. Man erhält:

$$Y(s) = \frac{as+b}{as^2+bs+c} y_0 + \frac{a}{as^2+bs+c} y_0' + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

11.2 Mit $y_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{as+b}{as^2+bs+c}$, $y_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{as^2+bs+c}$,

und $y_p(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{as^2+bs+c}$ erhält man als

Lösung von (P): $y(t) = y_0\, y_1(t) + y_0'\, y_2(t) + y_p(t)$.

---

12. Kapitel Die Faltung. (zu y_p in 11.2)

12.1 Faltungssatz

Für $f, g \in \mathcal{Z}$ ist $(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, ebenfalls aus $\mathcal{Z}$. Es gilt $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}f\, \mathcal{L}g$.

Bemerkungen: 0) $f * g$ heißt Faltung von f und g

1) Es gelten
$$f*g = g*f$$
$$(f*g)*p = f*(g*p)$$
$$f*(g+p) = f*g + f*p$$

2) Es gilt i.a. nicht $f*1 = f$ und $f*f = f^2$.
$f*f$ kann negativ sein.

Beispiele: 1) Berechne $1*1$ und mit $f(t) = t^2$, $g(t) = 1$ $f*g$.

2) Es sei $f(t) = \cos t$. Diskutiere $f*f$.

12.2 Es ist (11.2) $y_p(t) = \left(f * \frac{y_2}{a}\right)(t)$.

12.3 Beispiel

$$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(s+\alpha)} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ? \qquad (\omega, \alpha \in \mathbb{R})$$
$$\parallel$$
$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{1}{s+\alpha}$$

Mit $\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; \sin\omega t =: u(t)$, $\frac{1}{s+\alpha} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-\alpha t} =: v(t)$

folgt $f(t) = (u * v)(t) = \dfrac{\alpha \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}$

13. Kapitel Rücktransformation rationaler Funktionen. Zur Partialbruchzerlegung (PBZ)

13.1 Es seien p und q Polynome mit $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ und ohne gemeinsame Nullstellen.

Zerlege $q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x-a_j)^{k_j}$. $a_1, \dots, a_\ell$ sind die verschiedenen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten k_j; $k_j \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = \operatorname{grad}(q)$.

Es gibt dann eindeutig Zahlen β_{km} mit

$$(*) \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\beta_{j1}}{x-a_j} + \frac{\beta_{j2}}{(x-a_j)^2} + \dots + \frac{\beta_{jk_j}}{(x-a_j)^{k_j}} \right)$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{(x-a_j)^k}$ heißen Partialbrüche.

$(*)$ ist die Partialbruchzerlegung von $\frac{p}{q}$.

13.2 Gesucht ist $f(t)$ mit

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) = \frac{G(s)}{N(s)}$$

Hier sind G, N Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, mit $\operatorname{grad}(G) < \operatorname{grad}(N) =: n$.

N besitze nur einfache Nullstellen: $s_1, \dots, s_n$.

Also: $N(s) = (s-s_1)(s-s_2) \cdots (s-s_n)$

Der PBZ-Ansatz für F lautet hier:

$$\frac{G(s)}{N(s)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{s-s_j}.$$

Man findet $\gamma_k = \dfrac{G(s_k)}{N'(s_k)}$

Also $F(s) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{G(s_k)}{N'(s_k)} \dfrac{1}{s-s_k}$ und mit

$\dfrac{1}{s-s_k} \circ\!\!-\!\!\circ\, e^{s_k t}$ erhält man $\underline{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{G(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t}}$

<u>13.3</u> Es sei $a \neq 0$. Zu

$F(s) = \dfrac{1}{s(s+a)^n}$ ist $f(t)$ mit $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$

gesucht.
Der PBZ-Ansatz ist hier

$$F(s) = \frac{\gamma_0}{s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(s+a)^k}.$$

$f(t)$ ist wegen $\dfrac{1}{s} \circ\!\!-\!\!\circ\, h(t)$ und

$$\frac{1}{(s+a)^k} \circ\!\!-\!\!\circ\, \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-at} h(t)$$

kein Problem.
Man findet: $\underline{\gamma_0} = \lim\limits_{s \to 0} sF(s) = \underline{\dfrac{1}{a^n}}$ und

$$\underline{\gamma_k} = \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \to -a} D^{n-k}\left[(s+a)^n F(s)\right]$$

$$= \underline{-\frac{1}{a^{n-k+1}}} \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

<u>13.4</u> Löse mittels Anwendung der Laplace Transformation

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = h(t) - h(t-1) + h(t-2) - h(t-3) + h(t-4) - h(t-5)$$

$y(0) = y'(0) = 0$. Was heißt hier eigentlich "Lösung"?

14. Kapitel Bemerkungen zur Dirac (Delta) Funktion

14.1 $\delta(x-x_0)$ $(=\delta(x_0-x))$ wird durch die Wirkung auf eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ definiert durch:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0-x) f(x)\,dx = f(x_0)$$

, wobei das Integral als Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x_0-x) f(x)\,dx$ zu verstehen ist, wobei $\delta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a>0)$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften sind:

D1 : $\delta_a \geq 0 \quad \forall a$

D2 : $\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x)\,dx = 1 \quad \forall a$

D3 : Für jedes $r>0$ gilt $\lim\limits_{a\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus\{|x|<r\}} \delta_a(x)\,dx = 0$

Deutet man δ_a als Dichten von Massenverteilungen, so besagt D2, dass für jedes a die Gesamtmasse konstant 1 ist, und D3, dass sich die Gesamtmasse mit $a \to 0$ im Nullpunkt konzentriert.

Beispiele für mögliche Funktionen δ_a („Realisierungen für $\delta(x-x_0)$"):

$$\delta_a^{(1)}(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}, \quad \delta_a^{(2)}(x) = \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right)^2, \quad \delta_a^{(3)}(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2},$$

$$\delta_a^{(4)}(x) = \frac{2}{\pi a}\frac{1}{e^{x/a}+e^{-x/a}}, \quad \delta_a^{(5)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & , |x| \leq a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$$

14.2 Laplace Transformierte von $\delta(t-t_0)$ $(t_0>0)$:

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t-t_0)\,dt = \underline{e^{-st_0}}$$

Dies kann man realisieren z.B. mit

$$\delta_a^{(6)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0\le t\le a \\ 0, & t<0,\ t>a \end{cases}$$

. $\delta_a^{(6)}$ hat die Eigenschaften D1, D2, D3.

Und es gilt:

$$\delta_a^{(6)}(t) = \frac{1}{a}\left(h(t) - h(t-a)\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s}\right) \underset{(a\to 0)}{\longrightarrow} 1$$

und mit 10.2

$$\delta_a^{(6)}(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-st_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s}\right) \underset{(a\to 0)}{\longrightarrow} e^{-st_0}$$

14.3 Aufgabe 7 / 14.Ü

$$Ly(t) := y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 3\,\delta(t-1) + \delta(t-2),\quad y(0) = y'(0) = 1$$

Lösungen 14.Ü: $y(t) = e^{2t}(1-t)\,h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1)$
$+ (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)$

Diese „Lösung" ist so zu verstehen:

$0\le t<1$ $\quad y(t) = y_1(t) := e^{2t}(1-t)$ löst $Ly=0$ mit $y(0)=y'(0)=1$

$1\le t<2$ $\quad y(t) = y_2(t) := e^{2t}(1-t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}$ löst $Ly = 0$

mit $y_1(1) = y_2(1)$ und $y_2'(1) - y_1'(1) = 3$

$2\le t$ $\quad y(t) = y_3(t) := y_2(t) + (t-2)e^{2(t-2)}$ löst $Ly=0$

mit $y_2(2) = y_3(2)$, $y_3'(2) - y_2'(2) = 1$

Wird durch die Gleichung die Bewegung eines Teilchens der Masse 1 (Koeffizient bei $y''(t)$) beschrieben, so besagt die rechte Seite $3\delta(t-1)+\delta(t-2)$, wie sich der Impuls des Teilchens zur Zeit $t=1$ und zur Zeit $t=2$ ändert:

zur Zeit $t=1$ springt die Geschwindigkeit um 3

zur Zeit $t=1$ " " " " 1.

Ein paar zusätzliche Literaturanregungen zu den Wochen 11–14:

Henrici / Jeltsch : Komplexe Analysis für Ingenieure 2 Bände. Insbesondere der letzte Teil von Band 2 (Basel 1980)

Ameling : Laplace-Transformation (Braunschweig 1979)

Davies : Integral Transforms and their Applications (New York 1978)

Doetsch : Einführung in Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation (Stuttgart 1976)