35. Kapitel Integration über zweidimensionale Bereiche

35.1 (vgl. 26.1, 28.1, 31.1, 31.3)

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge. ∂G bezeichnet den Rand von G, der so definiert ist:

$$\vec{x}_0 \in \partial G \iff \text{für jedes } r > 0 \text{ gelten } B(\vec{x}_0, r) \cap G \neq \emptyset$$
$$\text{und } B(\vec{x}_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset .$$

Mit $\overline{G} := G \cup \partial G$ wird der Abschluss von G bezeichnet.

Beispiel: $R = (0,5) \times (0,5) = \{(x,y) \mid 0 < x < 5,\ 0 < y < 5\}$ ist ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$. Hier ist

$$\partial R = \{(0,y) \mid 0 \le y \le 5\} \cup \{(5,y) \mid 0 \le y \le 5\}$$
$$\cup \{(x,0) \mid 0 \le x \le 5\} \cup \{(x,5) \mid 0 \le x \le 5\}$$

und

$$\overline{R} = [0,5] \times [0,5]$$

35.2 Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit einer stückweise glatten Randkurve ∂G. Es ist $f \in C^0(\overline{G})$ gegeben.

G ist vom Typ $G^{(x)}$, falls $G = \{(x,y) \mid a(y) < x < b(y),\ c < y < d\}$ mit $a, b \in C^1([c,d])$ gilt.

G ist vom Typ $G^{(y)}$, falls $G = \{(x,y) \mid c(x) < y < d(x),\ a < x < b\}$ mit $c, d \in C^1([a,b])$ gilt.

<u>Definition</u> : $\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y) := \int\limits_{y=c}^{d} \Big(\int\limits_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy$

für G vom Typ $G^{(x)}$

$:= \int\limits_{x=a}^{b} \Big(\int\limits_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx$

für G vom Typ $G^{(y)}$.

Ist G ein Gebiet, das sich disjunkt in Gebiete $G_1, \dots, G_N$ vom Typ $G^{(x)}$ oder $G^{(y)}$ zerlegen lässt, so wird definiert:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y) := \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{G_j} f(x,y)\,d(x,y).$$

<u>Bemerkungen</u>

1. Falls $f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in G$, gilt, so gibt

$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y)$ <u>das Volumen des Körpers</u>

$K = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in G\}$ an.

2. $\iint\limits_G d(x,y)$ ist <u>der Flächeninhalt $I(G)$</u> von G. □

35.3 Beispiele

1. G sei das beschränkte Gebiet, das von den Kurven $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ berandet wird;

$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,d(x,y) = \frac{9}{4}$$

2. Für $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$, $0<x<1$, $0<y<1$,

rechnet man nach:

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx = \frac{1}{2},\quad \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy = -\frac{1}{2}$$

<u>Satz 1</u> Gilt $f \in C^0(\underbrace{[a,b]\times[c,d]}_{=:G})$, so hat man

$$\iint_G f(x,y)\,d(x,y) = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

3. Berechne $I(G)\ (= 3\pi)$ für $G = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$

---

36. Kapitel Kurvenintegrale (Linienintegrale)

<u>36.0</u> Im folgenden ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und γ die orientierte Bahn einer stückweise glatten Kurve, die in G verläuft. $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1[a,b]$, $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ für $a \le t \le b$, sei eine Parameterdarstellung.

<u>36.1</u> Es sei $f \in C^0(G)$.

<u>Def</u>: $\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$

<u>Bemerkungen</u> <u>1.</u> $f=1$: $\int_\gamma ds$ = Länge von $\gamma = L(\vec{r})$.

<u>2.</u> $\int_\gamma f\,ds$ ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung. D.h.:

Ist $\vec{\varrho}=\vec{\varrho}(\tau)$, $\alpha\le\tau\le\beta$, eine andere Darstellung für γ, so gilt

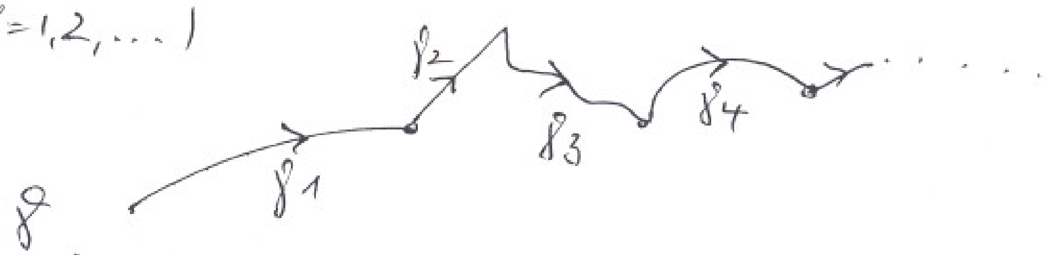
$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{\varrho}(\tau))\,\|\vec{\varrho}\,'(\tau)\|\,d\tau .$$

(vgl. 27.3)

3. Bezeichnet $-\gamma$ die entgegengesetzt orientierte Bahn (etwa mit der Darstellung $\varrho(\tau)=\vec{r}(a+b-\tau)$, $a\le\tau\le b$, wenn $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $a\le t\le b$, γ darstellt), so gilt

$$\int_{-\gamma} f\,ds = \int_\gamma f\,ds .$$

4. Es seien $\gamma_1,\gamma_2,\dots$ Bahnen von glatten Kurven mit: der Endpunkt von γ_ℓ ist der Anfangspunkt von $\gamma_{\ell+1}$ $(\ell=1,2,\dots)$



so wird definiert für $\gamma:=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\dots$

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{\ell=1}^{\dots} \int_{\gamma_\ell} f\,ds .$$

5. Ist $\vec{r}:[a,b]\to G$ eine geschlossene Kurve in G mit der Bahn γ, so schreiben wir:

$$\int_\gamma f\,ds = \oint_\gamma f\,ds \quad (\text{bzw. } \oint_\gamma f\,ds)$$

je nach Orientierung

36.2 Mit den Gegebenheiten aus 36.0 sei

$\vec{v}: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf G.

Def: $$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Mit dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t) := \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ und 36.1 kann man das auch so schreiben:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{T})\, ds$$

Beispiele: 1. Ist $\vec{v}$ ein Kraftfeld, so gibt $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ die Arbeit an, die gegen $\vec{v}$ verrichtet werden muss, um einen Massenpunkt auf γ zu bewegen. Ist $\vec{v}$ ein elektrisches Feld, so gibt das Integral eine Potentialdifferenz (Spannung) an (vgl. Beispiel 3. im Anschluss).

2. (siehe auch 36.1, Bemerkungen 3.)

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

3. Es sei $f: G \to \mathbb{R}$ ein C^1-Skalarfeld:

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

36.3

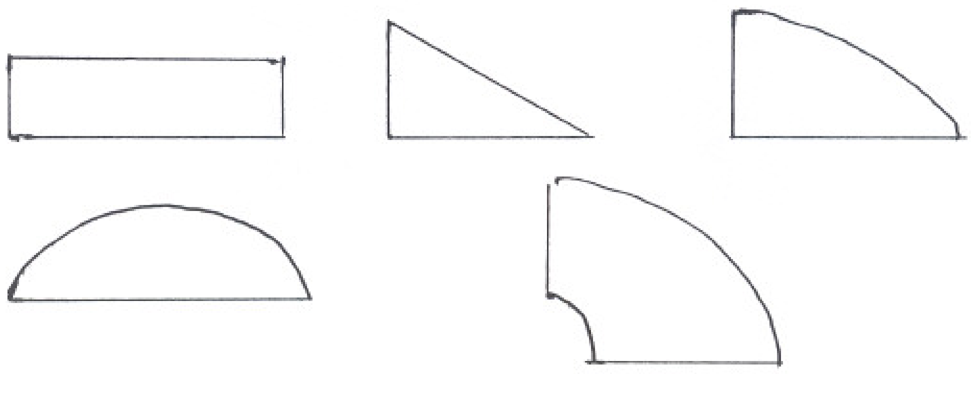
Satz 1 (Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^2$)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, das gleichzeitig vom Typ $G^{(x)}$ und $G^{(y)}$ ist. ∂G sei bezogen auf G positiv orientiert und stückweise glatt. Es sei $\tilde{G}$ ein Gebiet mit $\overline{G} \subset \tilde{G}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(\tilde{G})$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$(G) \qquad \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{G} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)(x,y)\, d(x,y)$$

Bemerkungen. Beispiele

1. Der Satz 1, (G), gilt für Gebiete vom Typ $G^{(x)}$ und $G^{(y)}$, sowie für Gebiete folgender Form



und für Gebiete, die sich durch endlich viele Schnitte in derartige Gebiete zerlegen lassen.

2. Es sei γ durch $r = \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, gegeben. Wobei r, φ die Polarkoordinaten der (x,y)-Ebene sind. Für

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{zu berechnen.}$$