Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011
26.05.2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{f}(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big)$

b) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

c) $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 2

Die Funktionen $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\vec{f}(x,y) = \big(x^2,\ y^2\big)\,, \qquad \vec{g}(x,y) = \big(\sin(xy),\ e^{x+y}\big)\,, \qquad \vec{h}(x,y) = \big(e^x\cos y,\ \sinh x\big)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$, $\vec{g}$ und $\vec{h}$, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $\vec{g}\circ\vec{f}$ und $\vec{h}\circ\vec{g}$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $\vec{g}\circ\vec{f}$ und $\vec{h}\circ\vec{g}$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1,-1,0)$.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (0,0)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die globalen Extrema von

$$f(x,y,z) := 5x + y - 3z$$

auf der Menge $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Die Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion $\vec{g}$ bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber $\vec{g}$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.

Achtung: Am Freitag, den 27.05., findet am Übungstermin (13:30 bis 15:00 Uhr, Hörsaal am Fasanengarten) eine Vorlesung statt.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 19.09.2011, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 15.07.2011.**
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etecphys2011s/.