

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Physik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f' .

a) $f(x + iy) = \sin x \sin y - i \cos x \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

b) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

c) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \quad (\text{für } z \neq 0)$

Aufgabe 2

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

der Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen, die u als Realteil haben.

Aufgabe 3

Begründen Sie, dass die durch $f(z) = z^2 + 2z$ gegebene Funktion f auf der Kreisscheibe $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/2\}$ schlicht ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von $f(G)$.

Hinweis: Abschnitt 2.1 der Vorlesung.

Aufgabe 4

Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e, \frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi\}$.

- Begründen Sie, dass das Gebiet G durch eine Logarithmusfunktion schlicht abgebildet werden kann.
- Bestimmen Sie einen Zweig des Logarithmus, für den $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$ gilt, und geben Sie das Bild von G unter dieser Abbildung an.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von G .

Aufgabe 5

- a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1 + i)^i, \quad i^{(i^i)}, \quad (\log i)^i.$$

Hierbei bezeichnet $\log z$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^α sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

- b) Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{1/z} = i$.

Aufgabe 6

Betrachten Sie die durch $f(z) = \sin z$ gegebene Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

- a) Worauf bildet die Funktion f Geraden ab, die in der komplexen Zahlenebene parallel zu den Achsen liegen?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

- b) Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt $f'(z_0) \neq 0$?

Es sei z_0 ein solcher Punkt. g sei die Parallele zur reellen Achse durch z_0 und h sei die Parallele zur imaginären Achse durch z_0 . Somit schneiden sich die Geraden g und h in z_0 im rechten Winkel. Zeigen Sie, dass sich auch die Bilder dieser Geraden im Punkt $f(z_0)$ im rechten Winkel schneiden.

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 02.07.2011, von 09:00 bis 11:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Hörsaal
ETEC	Benz-Hörsaal
Physik/Chemie	Daimler-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.