Übungsklausur HM II SS 2011 Lösungen

Aufgabe 1

a) $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{letzte Zeile}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ soll erfüllen:

1. $2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ $(\vec{u} \perp \vec{b})$
2. $\vec{u} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ $(\vec{u} \in V)$
3. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$ $(\|\vec{u}\| = 1)$

$\underline{1}, \underline{2}. \Rightarrow \lambda = -\mu \overset{2.}{\Rightarrow} u_1 = \lambda,\ u_2 = -2\lambda,\ u_3 = 0,\ u_4 = 2\lambda$

$\underline{3}. \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ und $\underline{\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

c) $\underline{\text{Wähle } \vec{v}_1 = \vec{u} \text{ und } \vec{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\left(= \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$.

$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$ l.u. und in V: also Basis von V.

d) $P(\vec{v}) = \frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$= \underline{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}}$

$\underset{(*)}{\underline{P(P(\vec{v}))}} = P(\vec{v}) \cdot \vec{v}_1\, \vec{v}_1 + P(\vec{v}) \cdot \vec{v}_2\, \vec{v}_2$

(mit Def von $P(\vec{v})$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1$)

$= \underline{P(\vec{v})}$

e) $\vec{w} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$: Wieder mit $\overline{(*)}$ folgt: $\underline{(\vec{v} - P(\vec{v})) \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2)}$
$\underline{= 0}$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1

a) $$0 = \det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

Entwickle nach der 1. Spalte

$$\overset{\downarrow}{=} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 3-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1-\lambda&0&-1\\1&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

Entwickle ↓ nach 2. Spalte   nach 2. Spalte

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\1&3-\lambda\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\1&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= \big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\big)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\1&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= \big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\big)^2 = (\lambda-2)^4$$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\lambda = 2$ ist der einzige EW. Er hat die algebraische Vielfachheit 4.

Zugehörige EV $\vec{x}$ sind Lösungen von $(A-2E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0} \quad \Big\} \; (**)$$

Somit ist $\operatorname{rang}(A-2E) = 2$, d.h. die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 2$ ist 2. Da für $\lambda = 2$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

Setzt man in $(**)$ etwa $x_1 = t$, $x_4 = \tau$, so erhält man alle EV von A:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}t\\-\tau\\t+\tau\\\tau\end{pmatrix} \quad \text{für } t,\tau \text{ beliebig, } t^2+\tau^2 \neq 0.$$

oder $\vec{x} = t\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $t^2+\tau^2 \neq 0$

(Basis des Eigenraumes)

b) $\underline{\det(A)}$ = Produkt aller EW $= 2^4 = \underline{16}$

Aufgabe 3

Definiere $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\vec{h}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 2y^2 \\ 2x + y \end{pmatrix}$, $\vec{h}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hiermit ist $f = \psi \circ \vec{\varphi} \circ \vec{h}$.

a) $\underline{f(1,1)} = (\psi \circ \vec{\varphi})(\vec{h}(1,1)) = \psi(\vec{\varphi}(-1,3)) = \psi(7,-3,8)$

$\underline{\underline{= -41}}$

b) Kettenregel: $\underline{f'(1,1) = \psi'((\vec{\varphi} \circ \vec{h})(1,1))\, \vec{\varphi}'(\vec{h}(1,1))\, \vec{h}'(1,1)}$ $\quad \underline{(*)}$

$$\underline{\vec{h}'(1,1)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -4y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\vec{\varphi}'(\vec{h}(1,1))} = \vec{\varphi}'(-1,3) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=-1 \\ y=3}} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

Mit (siehe oben a)) $(\vec{\varphi} \circ \vec{h})(1,1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ erhält man

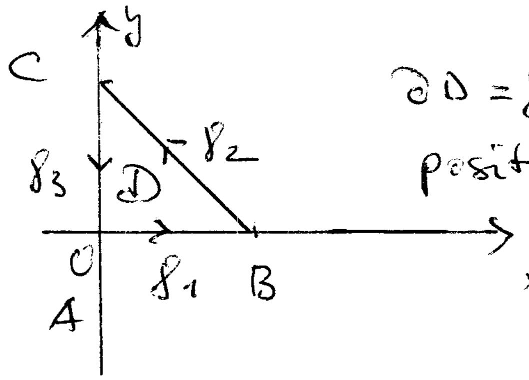
$$\underline{\psi'(7,-3,8)} = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 2 \end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=7 \\ y=-3}} = \underline{\begin{pmatrix} -14 & 6 & 2 \end{pmatrix}}$$

Insgesamt gibt also:

$$\underline{f'(1,1)} = \begin{pmatrix} -14 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 106 & -222 \end{pmatrix}}$$

Übungsklausur HM II SS 2011 Lösungen

Aufgabe 4



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ positiv orientiert

Parametrisierung von

$\gamma_1: \quad \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le \pi, \quad d\vec{s}\,|_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$-\gamma_2: \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t+\pi \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le \pi, \quad d\vec{s}\,|_{-\gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt$

$-\gamma_3: \quad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le \pi, \quad d\vec{s}\,|_{-\gamma_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$

a) $\underline{\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{-\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{-\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

$$= \int_0^\pi \sin t \, dt - \int_0^\pi (\sin t - t(-t+\pi))\, dt$$

$$= \int_0^\pi t(-t+\pi)\, dt = \underline{\frac{1}{6}\pi^3}$$

b) (Satz von Gauß in der Ebene) $\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_D (D_1(xy) - D_2(\sin x))\, d(x,y)$

$$= \iint_D y \, d(x,y) = \int_{x=0}^{\pi} \left(\int_{y=0}^{-x+\pi} y \, dy \right) dx = \underline{\frac{1}{6}\pi^3}$$

c) $\vec{N}_{|BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ds_{|BC(=\gamma_2)} = \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \sqrt{2}\, dt$

$$\Rightarrow \underline{\int_{BC} \vec{v} \cdot \vec{N} \, ds} = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin t \\ -t^2 + t\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (\sin t - t^2 + t\pi)\, dt$$

$$= \underline{2 + \frac{\pi^3}{6}}$$