

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inkl.
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Wegen $g(t) = 1$ für $t \in [-\pi, 0)$ und $g(t) = 1 + 2t$ für $t \in [0, \pi)$ folgt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} (1+2t) e^{-ikt} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} 2t e^{-ikt} dt \right); \end{aligned}$$

für $k = 0$ ergibt sich hier $\frac{1}{2\pi}(2\pi + \pi^2) = 1 + \frac{1}{2}\pi$; sonst gilt (partielle Integration)

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{1}{\pi} \left(t \cdot \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2} \Big|_{t=0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{i(-1)^k}{k} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{-k^2} = \frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ikt} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right) e^{ikt}.$$

Als Koeffizienten in der reellen Form der Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ erhält man $a_0 = 2 + \pi$ und $a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = 2((-1)^k - 1)/(\pi k^2)$ sowie $b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = 2(-1)^{k+1}/k$. Nun zur Funktion h : Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten a_k und b_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist (wegen $h(-t) = \cos(-\frac{1}{2}t) = \cos(\frac{1}{2}t) = h(t)$ für alle $t \in (-\pi, \pi)$), gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{1}{2}t) \cos(kt) dt.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{1}{2}t) \cos(kt) dt \\ &= [2 \sin(\frac{1}{2}t) \cos(kt)]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin(\frac{1}{2}t) (-k \sin(kt)) dt \\ &= 2(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)) + 2k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\frac{1}{2}t) \sin(kt) dt \\ &= 4(-1)^k + 2k \left([-2 \cos(\frac{1}{2}t) \sin(kt)]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2 \cos(\frac{1}{2}t) (k \cos(kt)) dt \right) \\ &= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k / (1 - 4k^2)$. Damit kennen wir $a_k = I_k / \pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe von h in reeller Form

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} \cos(kt).$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten $\hat{h}(k)$ berechnen

$$\hat{h}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} \quad \text{und} \quad \hat{h}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi},$$

wobei $b_0 := 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Daher lautet die Fourierreihe von h in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} e^{ikt}.$$

Aufgabe 2

a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von f gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \alpha t e^{-int} dt + \int_0^{\pi} \beta t e^{-int} dt \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n = 0$ ergibt sich wegen $e^{-i0t} = 1$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{\alpha t^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{\beta t^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\alpha \pi^2}{2} + \frac{\beta \pi^2}{2} \right) = \frac{(\beta - \alpha)\pi}{4},$$

und für $n \neq 0$ liefert partielle Integration

$$\int t e^{-int} dt = \frac{t e^{-int}}{-in} - \int \frac{e^{-int}}{-in} dt = \frac{t e^{-int}}{-in} - \frac{e^{-int}}{(-in)^2} = \left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-int}.$$

Für alle $n \neq 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \left[\alpha \left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-int} \right]_{t=-\pi}^0 + \left[\beta \left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-int} \right]_{t=0}^{\pi} \\ &= \frac{\alpha}{n^2} - \alpha \left(\frac{-i\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{in\pi} + \beta \left(\frac{i\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-in\pi} - \frac{\beta}{n^2}, \end{aligned}$$

wegen $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ also

$$= \frac{(\alpha - \beta)(1 - (-1)^n)}{n^2} + \frac{(-1)^n(\alpha + \beta)\pi i}{n}.$$

Wir fassen zusammen:

$$c_0 = \frac{(\beta - \alpha)\pi}{4}, \quad c_n = \frac{(\alpha - \beta)(1 - (-1)^n)}{2\pi n^2} + i \frac{(-1)^n(\alpha + \beta)}{2n} \quad (n \neq 0).$$

Für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n in der reellen Darstellung der Fourierreihe von f gilt $a_n = c_n + \overline{c_{-n}}$ und $b_n = i(c_n - \overline{c_{-n}})$, wegen $c_{-n} = \overline{c_n}$ (nur, da f reellwertig!) also

$$a_n = c_n + \overline{c_n} = 2 \operatorname{Re} c_n \quad \text{und} \quad b_n = i(c_n - \overline{c_n}) = -2 \operatorname{Im} c_n.$$

Damit folgt $a_0 = 2 \operatorname{Re} c_0 = (\beta - \alpha)\pi/2$ und

$$a_n = \frac{(\alpha - \beta)(1 - (-1)^n)}{\pi n^2}, \quad b_n = -\frac{(-1)^n(\alpha + \beta)}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- b) Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

Alternativ: Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn f eine ungerade Funktion ist, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

- c) Die Funktion f ist 2π -periodisch und stückweise glatt, daher wird sie in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt, in Sprungstellen dagegen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert des links- und des rechtsseitigen Grenzwerts.

Ist $\alpha = -\beta$, so ist f auf ganz \mathbb{R} stetig, d. h. die Funktion wird auf ganz \mathbb{R} durch ihre Fourierreihe dargestellt.

Ist dagegen $\alpha \neq -\beta$, so hat f in den Punkten $t_k = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Sprungstellen mit $f(t_k+) = f(t_k) = -\alpha\pi \neq \beta\pi = f(t_k-)$, ist sonst aber stetig. Daher wird in diesem Falle f nur in den Punkten $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt. In den Punkten t_k konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(t_k+) + f(t_k-)) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\pi \neq f(t_k)$.

Aufgabe 3

- a) Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f zu einer 2π -periodischen, geraden Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fort:

$$F(x) := \begin{cases} t - \frac{\pi}{2}, & t \in [0, \pi], \\ -t - \frac{\pi}{2}, & t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad F(t + 2\pi) := F(t).$$

Für die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von F gilt dann $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \frac{\pi}{2}) \cos(kt) dt.$$

Es ist $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \frac{\pi}{2}) dt = \frac{2}{\pi} [\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int t \cos(kt) dt = \frac{t \sin(kt)}{k} - \int \frac{\sin(kt)}{k} dt = \frac{t \sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2}.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t \sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0.$$

Das bedeutet $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = -4/((2n + 1)^2\pi)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion F auf ganz \mathbb{R} dar, es gilt also

$$t - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n + 1)^2\pi} \cos((2n + 1)t) \quad \text{für alle } t \in [0, \pi].$$

- b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} t - \frac{\pi}{2}, & t \in (0, \pi), \\ 0 & t = 0 \text{ oder } t = \pi \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad F(t + 2\pi) := F(t).$$

Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \frac{\pi}{2}) \sin(kt) dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\int t \sin(kt) dt = -\frac{t \cos(kt)}{k} + \int \frac{\cos(kt)}{k} dt = -\frac{t \cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{t \cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kt)}{k} \Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{k} = -\frac{(-1)^k + 1}{k}. \end{aligned}$$

Also ist $b_{2n-1} = 0$ und $b_{2n} = -1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion F in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$t - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin(2nt) \quad \text{für alle } t \in (0, \pi).$$

In den Stellen $t_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+) + F(0-)) = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0$.

Aufgabe 4

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens: In einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren x_1, \dots, x_n gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \dots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\text{lin}\{u_1, \dots, u_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.

Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem v_1, \dots, v_n mit der Eigenschaft $\text{lin}\{v_1, \dots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\text{lin}\{v_1\} = \text{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ein Orthogonalsystem v_1, \dots, v_j mit $\text{lin}\{v_1, \dots, v_j\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^j \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{K}$, so ist die Forderung $\text{lin}\{v_1, \dots, v_{j+1}\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i \in \{1, \dots, j\}$ ist, muss

$$0 \stackrel{!}{=} \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^j \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für alle $i \in \{1, \dots, j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren v_1, \dots, v_n werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1, \quad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^j \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Man beachte: Die Vektoren x_1, \dots, x_n sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_j\} = \text{lin}\{v_1, \dots, v_j\}$ für $j = 1, \dots, n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j . Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.

Setzen wir nun noch $u_j := v_j / \|v_j\|$ ($j = 1, \dots, n$), so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

- a) Die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 5Z_1}]{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 - \frac{3}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \bar{1} + 2i \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \bar{0} + 1 \cdot \bar{1} = 6,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{-1} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$v_3 := x_3 - \sum_{k=1}^2 \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

- b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 5Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 + 3Z_1}]{Z_2 \rightarrow Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\text{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \text{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2\} = \text{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.

Aufgabe 5

- a) Die Aussage ist wahr: Sei $x \in V$. Da die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$ gilt, ist diese insbesondere für $y = x$ erfüllt. Also haben wir $\langle x, x \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies nur für $x = 0$ der Fall sein.
- b) Die Aussage ist wahr: Seien $x_1, \dots, x_n, x \in V$. Es gelte $x \neq 0$ und $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$. Wäre $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} = V$, so hätten wir $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$. Aus a) folgte dann unmittelbar $x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Also ist die Annahme falsch und es gilt $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 6

Es gilt

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 10 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 10 & -1 & 9 & 9 \\ 4 & 5 & 9 & 29 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -10 \\ -1 & 27 & 12 \\ -10 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$