Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det(A) = +2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinente ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

b) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1\big) - 2\big(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1\big) + 4\big(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

c) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte (vgl. 15.2 (b)) und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = -4.$$

Aufgabe 2

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.
[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2)\cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1, j=2,3,4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 3

Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.
IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2} (x_k - x_j)\,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (y_k - y_j) \qquad \text{für alle } y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV)}.$$

Seien nun $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das x_1-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen. Für $k = n+1, n, \ldots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das x_1-fache der $(k-1)$-ten Spalte von der k-ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \ldots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{= \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m = x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \ldots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Aufgabe 4

Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$(z \,|\, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}) = 0 \qquad \text{und} \qquad (z \,|\, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}) = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor z müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.