

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 3 aus dem Übungsblatt 1) die Werte der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Aufgabe 2

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer 2π -periodischen, über $[-\pi, \pi]$ integrierbaren Funktion?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare und 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Nach dem Darstellungssatz ist dann für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik c_k e^{ikt}.$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $x \times y$, $(x \times y|x)$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5

Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden.

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar?

Aufgabe 7

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S an so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.