Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für jedes α ist die reelle Matrix A_α symmetrisch; nach dem Satz in 16.8 gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A. Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets ein Eigenwert von A_α. Wegen

$$A_\alpha - 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist 2 stets ein Eigenwert von A_α (unabhängig von α). Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$. Somit hat A_α nur im Fall $\alpha = 3$ den Eigenwert 3.
Bemerkung: Nachdem wir gezeigt haben, dass 1 und 2 Eigenwerte von A_α sind, können wir bei der Untersuchung, wann die Matrix A_α die Eigenwerte $1, 2, 3$ besitzt, auch auf die Betrachtung von $A_\alpha - 3I_3$ verzichten und stattdessen mit Hilfe der Spur von A_α argumentieren. Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte (gemäß ihrer algebraischen Vielfachheiten wiederholt, vgl. Folgerung in 16.9) ist, erhalten wir

$$3 \text{ ist Eigenwert von } A_\alpha \iff \operatorname{Spur}(A_\alpha) = 6 \iff \tfrac{1}{2}\big((1+\alpha)+4+(1+\alpha)\big) = 6 \iff \alpha = 3.$$

Fazit: Genau für $\alpha = 3$ gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen:

$$E_{A_3}(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(3) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von A.

b) Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Gemäß Beispiel (2) in 16.1 sind a, b, c, d die Eigenwerte der Diagonalmatrix B. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

c) Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von C.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

d) Die Matrix $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt genau den Eigenwert 1. Der zugehörige Eigenraum ist $E_D(1) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, so dass D nur einen linear unabhängigen Eigenvektor hat.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. $v \in V \setminus \{0\}$ sei ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\varphi(v) = \lambda v$.

a) Es gilt $(\varphi + 5\,\mathrm{id}_V)(v) = \varphi(v) + 5\,\mathrm{id}_V(v) = \lambda v + 5v = (\lambda+5)v$, d.h. v ist ein Eigenvektor von $\varphi + 5\,\mathrm{id}_V$ zum Eigenwert $\lambda + 5$.

b) Es ist $\varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$. Dass $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$. $\varphi(v) = \lambda v$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ (IV). Dann folgt:

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi(\varphi^n(v)) \overset{\text{(IV)}}{=} \varphi(\lambda^n v) = \lambda^n \varphi(v) = \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1} v.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$

$$p(\varphi)(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi^n(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n v = p(\lambda)v.$$

(Hierbei ist $\varphi^0 := \mathrm{id}_V$ gesetzt.) Also ist v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Sei $x \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ^2 zum Eigenwert μ^2, d.h. $\varphi^2(x) = \lambda^2 x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V) \circ (\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) &= (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)((\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x)) = (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)(\varphi(x) + \mu x) \\ &= \varphi(\varphi(x) + \mu x) - \mu(\varphi(x) + \mu x) \qquad (1) \\ &= \varphi(\varphi(x)) + \varphi(\mu x) - \mu\varphi(x) - \mu^2 x \\ &= \varphi^2(x) - \mu^2 x = 0.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) = 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x = 0$.
Dann gilt $\varphi(x) = -\mu x$, d.h. x ist ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $-\mu$.

2. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) \neq 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x \neq 0$.
Aus (1) folgt $\varphi(\varphi(x) + \mu x) = \mu(\varphi(x) + \mu x)$. Daher ist $\varphi(x) + \mu x$ $(\neq 0)$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert μ.

Aufgabe 4

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium von Hurwitz aus 16.10. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad x^T B x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y^T B y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass B nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.